Семинар 25
13.3 Степенные ряды
13.3.1 Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости

Определение. ***Степенным рядом*** называют функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \qquad (*)$$

где x_0, a_n - действительные числа.

Если $x_0 = 0$, то имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$ $(**)$

В дальнейшем будем рассматривать ряды вида (**), т. к. они сводятся к рядам вида (*) подстановкой $x - x_0 = x'$.

Члены степенного ряда определены $\forall x \in \left(-\infty, +\infty\right)$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (**) сходится в точке

$$x_0 \neq 0,$$

то он сходится абсолютно в интервале

$$\left(-|x_0|, |x_0|\right).$$

Интервал сходимости степенного ряда

Возможны три случая:

1. ***Область сходимости состоит только из одной точки***

Пример 123. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Решение. $\forall x \neq 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \left| n^n x^n \right| > 1$ не выполняется необходимый признак сходимости числового ряда, т.е. числовой ряд расходится.

Ответ. Область сходимости ряда точка: $x = 0.$

2. ***Область сходимости вся числовая ось*** $D=(-\infty,\infty)$.

Пример 124. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}.$$

Решение. $\forall x\ \exists N:\ \forall n>N\ \left|\frac{x}{n}\right|<1$

и для $n>N$ члены ряда меньше сходящейся геометрической прогрессии. Следовательно числовой ряд сходится (см. свойства сходящихся числовых рядов).

Ответ. Область сходимости ряда: $D=(-\infty,\infty)$.

3. ***Область сходимости ограничена*** $D=(-R,R)$.

Пример 125. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Решение. Данный ряд, есть сумма геометрической прогрессии, которая имеет конечное значение (как мы помним из школы) при

$$|x|<1$$

Ответ. Область сходимости ряда: $D=(-1,1)$.

Теорема. Степенной ряд (**) абсолютно сходится для всех значений x, меньших по абсолютной величине некоторого числа R $\left(|x| < R\right)$, называемого ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

Следствие. Если ряд (**) расходится при $x = x_1$, то он расходится

$$\forall x : |x| > |x_1|.$$

Определение. Интервал $\left(-R, R\right)$ называется ***интервалом сходимости***.

В примере 123 интервал сходимости $\{0\}$.

В примере 124 интервал сходимости $\left(-\infty, \infty\right)$.

В примере 125 интервал сходимости $\left(-1,1\right)$.

Определение радиуса сходимости для степенных рядов

1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn+s}$, $u_n = a_n x^{pn+s}$,

где степень *x* - линейная целочисленная функция аргумента *n*.

В данном случае из признака д'Аламбера, радиус сходимости степенного ряда определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|^{1/p}.$$

2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn+s}, \quad u_n = a_n x^{pn+s},$

где степень *x* - линейная целочисленная функция аргумента *n*.

Применив радикальный признак Коши, можно получить формулу определения радиуса сходимости

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[pn]{|a_n|}}.$$

3. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{N(n)}, \quad u_n = a_n x^{N(n)},$

где степень *x* – произвольная целочисленная функция аргумента *n*. Здесь для определения радиуса сходимости применяются признак д'Аламбера или радикальный признак Коши.

Пример 126. Определить область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Ответ. Радиус сходимости ряда $R = \infty$.

Область сходимости ряда $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 127. Определить область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$a_n=\frac{1}{n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Интервал сходимости ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\Rightarrow\quad x\in(-1,1).$$

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) x=1, тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$

Это гармонический ряд, который расходится. Граница не включается в область сходимости.

Б) x = -1, тогда ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Это знакочередующийся ряд, который сходится (хотя и условно), т.к. он удовлетворяет всем условиям признака Лейбница:

1) $\forall n \quad |u_n| = \dfrac{1}{n} > |u_{n+1}| = \dfrac{1}{n+1},$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0.$

Ответ. Радиус сходимости степенного ряда $R = 1.$

Область сходимости степенного ряда $x \in [-1,1).$

Пример 128. Определить область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2},$$

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2},\quad a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{\left(2(n+1)-1\right)^2}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n-1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}=1,$$

Интервал сходимости ряда $x\in(-1;1)$.

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) $x = 1$, тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница

1. $\forall n \quad |u_n|=\frac{1}{(2n-1)^2}>|u_{n+1}|=\frac{1}{(2n+1)^2},$

2. $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=0.$

Граница включается в область сходимости.

Б) x = -1, тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница по аналогии с предыдущим рядом.

Эта граница также включается в область сходимости степенного ряда.

Ответ. Радиус сходимости степенного ряда $R = 1.$

Область сходимости степенного ряда $x \in [-1,1].$

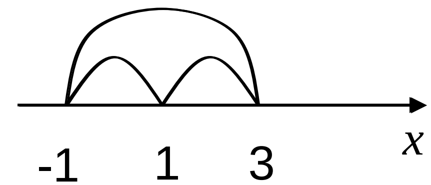
Пример 129. Определить область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n},$$

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2.$$



Интервал сходимости ряда $x\in(-1;3)$.

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) x = -1, тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница

1. $\forall n \quad |u_n|=\frac{1}{n}>|u_{n+1}|=\frac{1}{n+1},$

2. $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Граница включается в область сходимости.

Б) $x = 3$, тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Это расходящийся гармонический ряд.

Эта граница не включается в область сходимости степенного ряда.

Ответ: Радиус сходимости степенного ряда $R = 2.$

Область сходимости степенного ряда $x \in [-1; 3).$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 2804, 2805, 2806, 2808, 2878, 2881, 2883, 2888

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье». Задача 5
2. Задачи из Бермана. Занятие № 26 (кроме задачи 2917)