Семинар 24

13.2. Функциональные ряды

13.2.1. Основные определения. Область сходимости функционального ряда

Рассмотрим ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$

Такие ряды называют ***функциональными***. Предполагается, что функции $u_n(x)$ определены и непрерывны на множестве M для всякого n.

При значении $x=x_0$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0).$

Если данный числовой ряд сходится, то точка $x=x_0$ называется ***точкой сходимости*** функционального ряда.

Множество $M_1\subset M$ всех точек сходимости называется ***областью сходимости*** функционального ряда. Область сходимости – промежуток оси Ox.

Частичная сумма первых членов ряда обозначается $S_n(x)$; ***остаток ряда*** - $r_n(x)$.

Предельная сумма $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, определенная на множестве $M_1 \subset M$, называется ***суммой ряда*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве M_1.

Символическое обозначение

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,\quad x\in M_1$$

или

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\quad x\in M_1.$$

При конечном числе функций интеграл или производная от суммы равна сумме интегралов или производных. Для ряда это может не иметь место.

Пример 119. Определить для функционального ряда область сходимости и сумму ряда в области сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Решение:

1) Пусть $|x| < 1.$ В этом случае данный ряд – бесконечная убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно ряд сходится.

2) Пусть $|x| \geq 1.$ В этом случае данный ряд – бесконечная неубывающая геометрическая прогрессия. Следовательно не выполняется необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится.

Ответ. Область сходимости данного функционального ряда $|x| < 1.$ Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Для определения области сходимости функционального ряда применяют достаточные признаки сходимости:
признак д’Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho = \begin{cases} <1 \text{ ряд сходится,} \\ >1 \text{ ряд расходится,} \\ =1 \text{ ряд может как сходиться, так и расходиться.} \end{cases}$$

или радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = l = \begin{cases} <1 \text{ ряд сходится,} \\ >1 \text{ ряд расходится,} \\ =1 \text{ ряд может как сходиться, так и расходиться.} \end{cases}$$

Пример 120. Определить область сходимости функционального ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n\left(x+3\right)^n}.$$

Решение. Применим признак д’Аламбера.
$$u_n=\frac{\sqrt{n+1}}{3^n\left(x+3\right)^n},\quad u_{n+1}=\frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}\left(x+3\right)^{n+1}}.$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+2}\cdot 3^n\cdot\left(x+3\right)^n}{3^{n+1}\cdot\left(x+3\right)^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}\right|=\frac{1}{3\cdot\left|x+3\right|}.$$

Для того, чтобы ряд сходился, необходимо выполнение неравенства
$$\frac{1}{3\cdot\left|x+3\right|}<1\Rightarrow\left|x+3\right|>\frac{1}{3}\Rightarrow x+3>\frac{1}{3}\cup x+3<-\frac{1}{3}.$$

Следовательно интервал сходимости ряда

$$x \in \left(-\infty; -\frac{10}{3} \cup -\frac{8}{3}; +\infty \right).$$

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) $x = -\dfrac{10}{3},$ тогда ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n \left(-\frac{10}{3} + 3 \right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n \left(-\frac{1}{3} \right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n+1}.$$

Это знакочередующийся ряд, который расходится по признаку Лейбница

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = \infty.$$

Граница не включается в область сходимости.

Б) $x = -\frac{8}{3}$, тогда ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n \left(-\frac{8}{3}+3\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}.$$

Это знакоположительный ряд, который расходится по необходимому признаку сходимости

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = \infty.$$

Граница не включается в область сходимости.

Ответ. Область сходимости функционального ряда

$$x \in \left(-\infty; -\frac{10}{3} \cup -\frac{8}{3}; +\infty \right).$$

Пример 121. Определить область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^n 5x}{3^n}.$$

Решение. Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n \cdot \sin^n 5x}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot |\sin 5x|}{3} = \frac{2 \cdot |\sin 5x|}{3}.$$

Для того, чтобы ряд сходился, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{2 \cdot |\sin 5x|}{3} < 1 \Rightarrow |\sin 5x| < \frac{3}{2}.$$

Это выполняется $\forall x.$

Ответ. Область сходимости функционального ряда

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Пример 122. Определить область сходимости функционального ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^n 5x}{n^3+1}.$$

Решение. Применим признак д'Аламбера.
$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot \sin^{n+1} 5x}{(n+1)^3+1}.$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1} \cdot \sin^{n+1} 5x}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{n^3+1}{2^n \cdot \sin^n 5x}\right| =$$
$$= 2\cdot|\sin 5x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n+1)^3+1} = 2\cdot|\sin 5x|.$$

Для того, чтобы ряд сходился, необходимо выполнение неравенства
$$2\cdot|\sin 5x| < 1 \Rightarrow |\sin 5x| < \frac{1}{2}.$$

Следовательно интервал сходимости ряда

$$x \in \left(-\frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5}; \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5} \right) \quad k \in Z.$$

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5}$. Подставим в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^n \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi \right)}{n^3 + 1}.$$

В зависимости от значения k (четное или нечетное) окончательно ряд примет следующий вид.

В случае четного k

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}.$$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница:

1. $|u_1| > |u_2| > ... > |u_n| > ...,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0.$

В случае нечетного k

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}.$$

Это знакоположительный ряд, который сходится по признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ \ (p=3>1 \text{ ряд сходится}).$$

$$u_n=\frac{1}{n^3+1}<v_n=\frac{1}{n^3}.$$

Граница включается в область сходимости.

Б) $x=\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{k\pi}{5}.$ Подставим в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\sin^n\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)}{n^3+1}.$$

В зависимости от значения k (четное или нечетное) окончательно ряд примет следующий вид.

В случае нечетного k $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}.$$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница:

1. $|u_1|>|u_2|>\ldots>|u_n|>\ldots,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3+1}=0.$

В случае четного k $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$.

Это знакоположительный ряд, который сходится по признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ (p = 3 > 1 \text{ ряд сходится}).$$

$$u_n = \frac{1}{n^3+1} < v_n = \frac{1}{n^3}.$$

Граница включается в область сходимости.

Ответ. Область сходимости функционального ряда

$$x \in \left[-\frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5}; \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5} \right] \quad k \in Z.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 2803, 2807, 2812, 2812

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье»
   Задачи 6, 7