Семинар 23
13.1.5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Примеры знакопеременных рядов

1) $$1+2-3-4-5+6+7-\ldots,$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}+\frac{\sin 4}{4}+\ldots,$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}.$$

Сходящийся знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд из абсолютных величин членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Сходящийся знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если ряд из абсолютных величин членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Пример 116. Исследовать ряд на условную или абсолютную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{2^n}$$

Решение. Ряд знакопеременный. Рассмотрим ряд из абсолютных величин $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|.$$

Данный ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним со сходящимся рядом $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}, \quad q=\frac{1}{2}<1$$

(бесконечно убывающая геометрическая прогрессия)

$$u_n=\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|\le v_n=\frac{1}{2^n}.$$

Ряд из абсолютных величин сходится.

Ответ. Исходный ряд сходится абсолютно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то возможна перестановка бесконечного множества его членов.

Замечание. Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то при перестановке бесконечного множества его членов можно получить расходящийся ряд или изменится сумма ряда.

2) Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать.

Например,

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots\right)=$$

$$=a_1b_1+\left(a_2b_1+a_1b_2\right)+\ldots+\left(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\ldots+a_1b_n\right)+\ldots\ .$$

Сумма полученного ряда равна произведению сумм исходных рядов.

13.1.6. Знакочередующиеся ряды

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде

$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ то ряд сходится.

Причем $|S| < u_1, \quad |r_n| < u_{n+1}.$

Пример 117. Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Решение. Ряд знакочередующийся. Применим признак Лейбница.

1) $$|u_1|=\frac{1}{1}=1>|u_2|=\frac{1}{2}>\ldots>|u_n|=\frac{1}{n}>\ldots,$$

2) $$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

Условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно ряд сходится. Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, который расходится.

Ответ. Исходный ряд сходится условно.

Пример 118. Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+6}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}.$$

Решение. Ряд знакочередующийся. Применим признак Лейбница.

1) $|u_1| = \frac{7}{1\cdot 3\cdot 4} = \frac{7}{12} > |u_2| = \frac{8}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{5} > \ldots > |u_n| = \frac{n+6}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)} > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+6}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)} = 0.$

Условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}.$$

Применим предельный признак сравнения с обобщенным гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \left(p=2>1 \text{ ряд сходится}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+6}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)} \cdot \frac{n^2}{1} = 1 \neq 0.$$

Ответ. Ряд из абсолютных величин сходится, следовательно исходный ряд сходится абсолютно.

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 2790, 2793, 2795, 2797, 2798, 2799, 2800.

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье». Задача 4
2. Задачи из Бермана: Занятие 25