Семинар 22

13.1.4.2. Признак д'Аламбера

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \quad (\forall n \quad u_n > 0)$.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$ то

при $\rho < 1$ - ряд сходится,

при $\rho > 1$ - ряд расходится,

при $\rho = 1$ - вопрос о сходимости ряда остается открытым

(ряд может сходится или расходиться).

Пример 108. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак д'Аламбера

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ответ. Ряд сходится по признаку д`Аламбера.

Пример 109. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2n}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак д'Аламбера.

$$u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2-2(n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2-2(n+1)}\cdot\frac{n^2-2n}{1}=1.$$

Ответ. О сходимости ряда ничего сказать нельзя. Необходимо применить другой достаточный признак сходимости.

Пример 110. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак д'Аламбера.

$$u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+2)!\cdot(n+3)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)!\cdot(n+3)}\cdot\frac{(n+2)!}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+3)}=0<1.$$

Ответ. Ряд сходится по признаку д'Аламбера.

Пример 111. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак д’Аламбера.

$$u_{n+1}=\frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}\cdot\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+7)}{(3n+1)}=\frac{2}{3}<1.$$

Ответ. Ряд сходится по признаку д’Аламбера.

13.1.4.3 Радикальный признак Коши

Теорема. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$ то

при $l < 1$ - ряд сходится,

при $l > 1$ - ряд расходится,

при $l = 1$ - вопрос остается открытым (ряд может сходится или расходиться).

Пример 112. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$$

Ответ. Ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример 113. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{2} = \frac{e}{2} > 1$$

Ответ. Ряд расходится по радикальному признаку Коши.

13.1.4.4. Интегральный признак Коши

Теорема. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$, члены которого являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x: $u_1 = f(1), \ldots, u_n = f(n), \ldots$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $[1, \infty)$.

Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

и расходится, если интеграл расходится.

Пример 114. Исследовать на сходимость или расходимость обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$

Решение. Ряд знакоположительный. Функция $f(x) = 1/x^p$ монотонно убывает на интервале $[1, \infty).$ Применим интегральный признак Коши

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{x \to \infty} \left(x^{-p+1} - 1 \right).$$

Рассмотрим случаи: 1) $p > 1 \quad I = \frac{1}{p-1};$ 2) $p < 1 \quad I = \infty;$

3) $p = 1, \quad I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$

Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{сходится, если} & p > 1, \\ \text{расходится, если} & p \le 1. \end{cases}$

13.1.4.5. Оценка ошибки при приближенных вычислениях суммы ряда

$$S - S_n = r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots, \quad \forall n, \qquad r_n < \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

Данную задачу можно решать в двух вариантах:

Задача 1. Оценить ошибку в вычислении суммы ряда ε при суммировании заданного конечного числа членов ряда n.

Задача 2. Оценить потребное количество суммируемых членов ряда n для обеспечения точности ε вычисляемой суммы ряда.

Пример 115. Рассмотрим задачу 2 на примере обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1. \qquad r_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_n^{\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Решение. Для заданного ε можно оценить n из условия

$$r_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \le \varepsilon.$$

Зададим точность вычисления суммы ряда $\varepsilon = 0,001$ и рассмотрим несколько случаев:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $p = 2$, $\varepsilon = 0,001$ $\quad r_n < \frac{1}{n} \le 0,001,\ n = 1000.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $p = 3$, $\varepsilon = 0,001$ $\quad r_n < \frac{1}{2n^2} \le 0,001,\ n = 24.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, $p = 4$, $\varepsilon = 0,001$ $\quad r_n < \frac{1}{3n^3} \le 0,001,\ n = 7.$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 2756, 2758, 2763, 2764, 2768, 2773, 2775, 2778, 2779

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье». Задачи 2, 3
2. Задачи из Бермана: Занятие 24