Семинар 21
13.1.4. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости ряда
13.1.4.1. Признаки сравнения

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ такой, что $\forall n \;\; u_n > 0.$

Лемма. Если частичные суммы ряда с положительными членами ограничены сверху $S_n < M,$ то ряд сходится.

Следствия:

Если ряд с положительными членами сходится, то $S_n < S.$

Если ряд с положительными членами расходится, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Признак сравнения (в форме неравенства)

Теорема. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ (1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ \ (2), \quad \left(u_n > 0,\ v_n > 0\right) \ \text{и} \quad \forall n \ \ u_n \le v_n. \qquad (*)$$

Тогда:

1) если сходится ряд (2), то сходится ряд(1);

2) если расходится ряд (1), то расходится ряд (2).

Признак также справедлив, если условие (*) выполняется с какого-либо номера $N > 1$ в силу свойств сходящихся рядов.

Пример 105. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \alpha = \frac{1}{2};$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним с гармоническим рядом, который расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \forall n \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Ответ. Следовательно, исходный ряд тоже расходится по признаку сравнения знакоположительных рядов в форме неравенств.

Предельный признак сравнения

Теорема. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2), \qquad \left(u_n > 0,\ v_n > 0\right).$$

Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A,\ \ 0 < A < \infty,$ то ряды (1) и (2)

сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Если $A \to \infty$ или $A \to 0$, то предельный признак сравнения не применим. Необходимо применить другой признак сходимости.

Для использования признаков сравнения применяют ***калибровочные ряды***. В частности:

1. **Бесконечная геометрическая прогрессия.** Как известно из школы

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_1 \cdot q^{n-1}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q-1} = \begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q}, & |q|<1; \\ \text{нет предела}, & |q|\geq 1. \end{cases}$$

В первом случае ряд сходится, во втором – расходится.

2. ***Обобщенный гармонический ряд (Ряд Дирихле)***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

При $\alpha > 1$ ряд сходится, при $\alpha \leq 1$ ряд расходится (почему – узнаем позднее, когда будем изучать достаточный интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов).

Пример 106. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n^2-1}.$$

Решение. А) Ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\alpha = 1,\ \text{ряд расходится}).$$

$$u_n = \frac{4n}{3n^2-1} = \frac{\frac{4n}{3}}{n^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{n - \frac{1}{3n}} > v_n = \frac{1}{n}.$$

Ответ. Исходный ряд также расходится по признаку сравнения знакоположительных рядов в форме неравенств.

Решение. Б) Ряд знакоположительный. Применим предельный признак сравнения. Сравним с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\alpha = 1, \text{ ряд расходится}).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n^2 - 1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{4}{3} \neq 0.$$

Ответ. Исходный ряд также расходится по предельному признаку сравнения знакоположительных рядов.

Пример 107. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n^3 - 1}.$$

Решение. А) Ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним с обобщенным гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\alpha = 2,\ \text{ряд сходится}).$$

$$u_n = \frac{4n}{3n^3 - 1} = \frac{\frac{4n}{3n}}{n^2 - \frac{1}{3n}} = \frac{\frac{4}{3}}{n^2 - \frac{1}{3n}} > v_n = \frac{1}{n^2}.$$

Ответ. О сходимости исходного ряда мы ничего сказать не можем.

Решение. Б) Ряд знакоположительный. Применим предельный признак сравнения. Сравним с обобщенным гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\alpha = 2,\ \text{ряд сходится}).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n^3 - 1} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{4}{3} \neq 0.$$

Ответ. Исходный ряд также сходится по предельному признаку сравнения знакоположительных рядов.

Замечание. Последний пример показывает, что при исследовании ряда на сходимость, нужно правильно выбирать применяемый признак сходимости ряда.

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 2739, 2742, 2744, 2745, 2747.

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье». Задача 1
2. Задачи из Бермана: Занятие 23 (начиная с 2738)