

Семинар 20

13. Ряды

13.1. Числовые ряды

13.1.1. Пример постановки задачи

Рассмотрим известную из школы геометрическую прогрессию

$$u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots + u_1q^{n-1}$$

или

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

где u_1 - первый член прогрессии,

$u_k = u_1q^{k-1}$ ($k = \overline{1, n}$) - общий член прогрессии,

q - знаменатель прогрессии,

n - число членов прогрессии.

Пусть S_n - сумма n членов геометрической прогрессии,

тогда
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (1)$$

и
$$S_n = \frac{u_1 - u_1q^n}{1 - q}.$$

Пусть теперь число членов прогрессии стремится к бесконечности ($n \rightarrow \infty$), тогда получаем бесконечную геометрическую прогрессию, члены которой составляют бесконечную последовательность $\{u_n\}$ с **общим членом**

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

В данном случае известен закон (правило)

$$f(n) = u_n = u_1 q^{n-1},$$

по которому получен общий член геометрической прогрессии

$$u_n = f(n) \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (1) следует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$

или $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 - u_1 q^n}{1 - q} = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

В этом примере присутствуют все элементы для введения важнейших объектов математического анализа – рядов, которые являются инструментом решения прикладных задач математики и физики.

13.1.2. Определение числового ряда и его суммы. Остаток ряда. Основные свойства сходящихся рядов

Пусть дана бесконечная последовательность

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Определение. Выражение $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется **рядом**, а числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ - **членами ряда**.

Краткая запись $\sum_{n=l}^m u_n$ - символическое обозначение

суммирования членов (элементов) $u_l + u_{l+1} + \dots + u_{m-1} + u_m$,

где принято:

\sum - обозначение операции суммирования нескольких членов,

n - индекс суммирования,

l - нижний индекс первого слагаемого,

m - нижний индекс последнего слагаемого.

u_n - **общий член ряда**.

Ряд считается заданным, если задана целочисленная функция f и $u_n = f(n)$.

Примеры числовых рядов

Пример 96. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$u_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Пример 97.

$$u_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Иногда ряд задают рекуррентной формулой.

Пример 98.

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{3}u_{n-2}.$$

Тогда $u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{12}$, и т.д.

Пусть дан ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$.

Назовем $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ **частичной суммой ряда**.

Образуем последовательность частичных сумм $\{S_n\}$

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Определение. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд **сходящийся** и S - его **сумма**.

Если последовательность $\{S_n\}$ не стремится к пределу, то ряд **расходящийся**.

Последнее имеет место в двух случаях:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$;
- 2) не существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Таким образом, вопрос о сходимости ряда эквивалентен вопросу о существовании конечного предела для последовательности частичных сумм $\{S_n\}$.

Пример 99. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0, |q| < 1);$$

Решение. Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Как мы знаем из школы,

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q} = S.$$

Ответ. Ряд сходится.

Пример 100. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0, q = 1);$$

Решение.

$$S_n = na, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Ответ. Ряд расходится.

Пример 101. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0, q = -1);$$

Решение. $S_1 = -a, S_2 = 0, S_3 = -a, \dots;$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует.

Ответ. Ряд расходится.

Определение. *Остатком* или *остаточным членом* сходящегося ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется разность между его суммой S и частичной суммой S_n , обозначается

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Основные свойства сходящихся рядов

Теорема 1. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, то сходится любой из его остатков

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Следствие. Если ряд сходится, то сходится и ряд, в котором выброшено или прибавлено конечное число членов.

Теорема 2. Если ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится, то сходится ряд $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots$.

Теорема 3. Если ряды $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ и $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2,$$

то сходится ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots = S_1 \pm S_2$.

13.1.3. Необходимый признак сходимости ряда. Обобщенный гармонический ряд

Теорема (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Вообще стремление $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ не означает сходимости ряда.

Пример 102. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \dots + \frac{n}{100n+1} + \dots,$$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0.$$

Не выполняется необходимый признак сходимости.

Ответ. Ряд расходится.

Обобщенный гармонический ряд (гармонический ряд)

Определение. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где α любое

действительное число, называется *обобщенным гармоническим рядом*.

Определение. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ($\alpha = 1$) называется *гармоническим рядом*.

Пример 103. Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Решение. Запишем ряд в виде (разбив его, начиная с третьего члена, на группы по 2^k , $k = 1, 2, \dots$ слагаемых)

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \dots > \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \dots = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Новый ряд расходится.

Ответ. Исходный ряд также расходится.

Пример 104. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \alpha = \frac{1}{2};$$

Решение. Проверим выполнение необходимого признака сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется.

Запишем и оценим частичную сумму ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

Ответ. Исходный ряд расходится.

Замечание. Последние три примера показывают, что выполнение необходимого признака сходимости не говорит о сходимости ряда, а невыполнение, показывает его расходимость.

Домашнее задание

Сделать работу над ошибками по контрольным работам №1 и №2.

И сдать долги по типовым расчетам и домашним заданиям!