Семинар 19

12.4. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай простых действительных корней)

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad a_{ij} = const.$$

Систему можно свести к одному дифференциальному уравнению n - го порядка.

Будем искать частные решения в виде

$$x_1 = k_1 e^{rt}, \ldots, x_n = k_n e^{rt},$$

где $k_1, \ldots, k_n, r$ - неопределенные постоянные.

Дифференцируя частные решения и подставляя частные решения и их производные в систему, получим

$$\begin{cases} k_1 r e^{rt} = a_{11} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{1n} k_n e^{rt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n r e^{rt} = a_{n1} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{nn} k_n e^{rt}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11} - r) k_1 + \ldots + a_{1n} k_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} k_1 + \ldots + (a_{nn} - r) k_n = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-r) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{nn}-r) \end{vmatrix} = 0.$$

Получили характеристическое уравнение.

Раскроем определитель и найдем корни характеристического уравнения.

Предположим, что ***корни действительные и простые***. Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений. Пусть первый корень равен r_1. Тогда из (*)

$$\begin{cases} \left(a_{11}-r_1\right)k_1^{(1)}+a_{12}k_2^{(1)}+a_{13}k_3^{(1)}=0, \\ a_{21}k_1^{(1)}+\left(a_{22}-r_1\right)k_2^{(1)}+a_{23}k_3^{(1)}=0, \\ a_{31}k_1^{(1)}+a_{32}k_2^{(1)}+\left(a_{33}-r_1\right)k_3^{(1)}=0. \end{cases}$$

Здесь верхний индекс соответствует номеру корня.

Определитель системы равен нулю. Т.к. r_1 - простой корень, то, по крайней мере, один из миноров 2-го порядка не равен нулю. Тогда одно из уравнений следует из остальных.

Решение системы зависит от одной произвольной постоянной.

Пусть первые два уравнения линейно независимы. Тогда

$$\begin{cases}(a_{11}-r_1)k_1^{(1)}+a_{12}k_2^{(1)}=-a_{13}k_3^{(1)},\\ a_{21}k_1^{(1)}+(a_{22}-r_1)k_2^{(1)}=-a_{23}k_3^{(1)}.\end{cases}$$

Для нахождения решения применим формулу Крамера.

$$k_1^{(1)}=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad k_2^{(1)}=\frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}-r_1 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-r_1\end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-a_{13}\cdot k_3^{(1)} & a_{12}\\ -a_{23}\cdot k_3^{(1)} & a_{22}-r_1\end{vmatrix}=k_3^{(1)}\cdot\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22}-r_1 & a_{23}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}-r_1 & -a_{13}\cdot k_3^{(1)}\\ a_{21} & -a_{23}\cdot k_3^{(1)}\end{vmatrix}=k_3^{(1)}\cdot\begin{vmatrix}a_{13} & a_{11}-r_1\\ a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}.$$

Пусть

$$k_3^{(1)} = C_1 \cdot \Delta = C_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} - r_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_1 \end{vmatrix},$$

где C_1 -произвольная постоянная.

Тогда

$$k_1^{(1)} = C_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - r_1 & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$k_2^{(1)} = C_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} - r_1 \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Все остальные решения получаются умножением чисел $k_1^{(1)},\ k_2^{(1)},\ k_3^{(1)}$ на одну и ту же произвольную постоянную.

Поступая так со всеми корнями характеристического уравнения, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений:

1-ая система: $k_1^{(1)}e^{r_1 t},\ k_2^{(1)}e^{r_1 t},\ k_3^{(1)}e^{r_1 t};$

2-ая система: $k_1^{(2)}e^{r_2 t},\ k_2^{(2)}e^{r_2 t},\ k_3^{(2)}e^{r_2 t};$

3-ья система: $k_1^{(3)}e^{r_3 t},\ k_2^{(3)}e^{r_3 t},\ k_3^{(3)}e^{r_3 t}.$

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид (суммируем по столбцам члена предыдущей таблицы)

$$x_1 = C_1 k_1^{(1)}e^{r_1 t} + C_2 k_1^{(2)}e^{r_2 t} + C_3 k_1^{(3)}e^{r_3 t},$$
$$x_2 = C_1 k_2^{(1)}e^{r_1 t} + C_2 k_2^{(2)}e^{r_2 t} + C_3 k_2^{(3)}e^{r_3 t},$$
$$x_3 = C_1 k_3^{(1)}e^{r_1 t} + C_2 k_3^{(2)}e^{r_2 t} + C_3 k_3^{(3)}e^{r_3 t}.$$

Пример 95. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z, \\ y' = -4x - y - 4z, \\ z' = -y. \end{cases}$$

Решение. Это однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применим подстановки Эйлера $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$, $z = k_3 e^{rt}$.

Найдем производные неизвестных функций и подставим функции и их производные в систему дифференциальных уравнений. Получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -rk_1 \qquad\qquad\qquad + k_3 = 0, \\ -4k_1 - (1+r)k_2 - 4k_3 = 0, \\ \qquad\qquad - k_2 - rk_3 = 0. \end{cases}$$

Пример 95. (продолжение)

Для того, чтобы система имела ненулевое решение, определитель должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1 \\ -4 & -(1+r) & -4 \\ 0 & -1 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - r^2 + 4r + 4 = \left(4 - r^2\right)(r+1) = 0.$$

Получили характеристическое уравнение, решая которое найдем его корни

$$r_1 = -1,\ \ r_2 = -2,\ \ r_3 = 2.$$

Пример 95. (продолжение)

Рассмотрим корень $r_1 = -1$. Два уравнения алгебраической системы должны быть линейно независимы. Выберем для решения первое и третье уравнения

$$r_1 = -1, \quad \begin{cases} k_1^{(1)} + k_3^{(1)} = 0, \\ -k_2^{(1)} + k_3^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем, что

$$k_1^{(1)} = 1, \; k_2^{(1)} = -1, \; k_3^{(1)} = -1.$$

Следовательно $x_1 = e^{-t}, \; y_1 = -e^{-t}, \; z_1 = -e^{-t}.$

Применяя данную процедуру к корням $r_2 = -2, \; r_3 = 2,$ получим

Пример 95. (продолжение)

$$r_2 = -2,\ \begin{cases} 2k_1^{(2)} + k_3^{(2)} = 0, \\ -k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} = 0, \end{cases} \ k_1^{(2)} = 1,\ k_2^{(2)} = -4,\ k_3^{(2)} = -2.$$

$$x_2 = e^{-2t},\ \ y_2 = -4e^{-2t},\ \ z_2 = -2e^{-2t}.$$

$$r_3 = 2,\ \begin{cases} -2k_1^{(3)} + k_3^{(3)} = 0, \\ -k_2^{(3)} - 2k_3^{(3)} = 0, \end{cases} \ k_1^{(3)} = 1,\ \ k_2^{(3)} = -4,\ \ k_3^{(3)} = 2.$$

$$x_3 = e^{2t},\ \ y_3 = -4e^{2t},\ \ z_3 = 2e^{2t}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-2t} - 4C_3 e^{2t}, \\ z = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

12.5.4. Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n. \end{cases}$$

Введем обозначения:

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Вектор неизвестных функций

$$X(t) = \left(x_1(t) \ \ldots \ x_n(t) \right)^{\mathrm{T}},$$

Вектор их производных

$$X'(t) = \left(x_1'(t) \ \ldots \ x_n'(t) \right)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений можно представить в матричном виде

$$X' = AX.$$

Общее решение системы будет иметь вид

$$X = C_1 X_1 + \ldots + C_n X_n.$$

Частные решения находим в виде

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}.$$

Определение. Система векторных функций называется линейно независимой, если

$$\lambda_1 X_1(t) + \ldots + \lambda_n X_n(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Это выполняется, если определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} X_{11}(t) & \cdots & X_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}(t) & \cdots & X_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall t \in \langle a, b \rangle.$$

Для получения частного решения, сделаем подстановку Эйлера

$$X(t)=\begin{pmatrix} k_1e^{rt} \\ \cdots \\ \cdots \\ k_ne^{rt} \end{pmatrix}=e^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X'(t)=re^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Подставим в систему дифференциальных уравнений вектор неизвестных функций и их производных

$$X(t),\quad X'(t).$$

Получим $$re^{rt}K = Ae^{rt}K,$$

где $$K = \left(k_1 \; \dots \; k_n\right)^{\text{т}}.$$

Тогда $$rK = AK \Rightarrow \left(A - rE\right)K = 0,$$

где: r - собственное число матрицы A,

K - собственный вектор матрицы A.

Вектор K имеет ненулевое решение, если определитель матрицы системы линейных алгебраических уравнений равен нулю.

$$\left|A - rE\right| = 0.$$

Получили характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 4324(2, 4, 6)

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальные уравнения»: Задача 10
2. Задачи из Бермана: Занятие 21