

12.3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

Правой частью специального вида называется выражение

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$$

где: $P_1(x)$ - многочлен степени p ,

$P_2(x)$ - многочлен степени q .

Введем понятие **характеристика правой части**:

α - коэффициент при x в экспоненте правой части;

β - коэффициент при x в тригонометрии правой части;

$l = \max(p, q)$;

k - кратность корня с характеристикой α, β среди корней характеристического уравнения $r = \alpha \pm \beta i$.

Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Нахождение $y_{оо}$ общего решения однородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами изложено в пункте 12.3.2.

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью имеет вид

$$y_{чн} = x^k e^{\alpha x} (R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x),$$

где: $R_1(x), R_2(x)$ - многочлены степени $l = \max(p, q)$;

k - кратность корня с характеристикой α, β среди корней характеристического уравнения (если такого корня нет, то $k = 0$).

Коэффициенты многочленов после подстановки искомой функции U_{ch} и ее производных в дифференциальное уравнение находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов, т.е. приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x и при одинаковых гармониках.

Пример 90. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 3 = 0$.

Характеристики корней уравнения

$$r_1 = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \text{кратность корня } s = 1,$$

$$r_2 = 3, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 0, \quad \text{кратность корня } s = 1.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{оо} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Пример 90. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Правая часть уравнения $f(x) = 3e^{2x}$.

Характеристика правой части:

$\alpha = 2$ - коэффициент при x в экспоненте;

$\beta = 0$ - в правой части нет синусов и косинусов;

$l = 0$ - в правой части многочлен нулевой степени;

$k = 0$ - среди корней характеристического уравнения нет корня с характеристикой $\alpha = 2, \beta = 0$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = Ae^{2x},$$

причем

$$y'_{\text{чн}} = 2Ae^{2x}, \quad y''_{\text{чн}} = 4Ae^{2x}.$$

Пример 90. (продолжение)

Подставим искомую функцию $y_{чн}$ и ее производные в дифференциальное уравнение, получим равенство

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x}.$$

После сокращения равенства на e^{2x} , имеем $A = -3$.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения равно

$$y_{чн} = -3e^{2x}.$$

Ответ. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1e^x + C_2e^{3x} - 3e^{2x}.$$

Пример 91. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' + y = x + 1, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = -3.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y_{OH} = y_{OO} + y_{CH}$.

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 - 2r + 1 = 0$.

Корень уравнения $r_{1,2} = 1$ имеет характеристику:

$\alpha = 1, \beta = 0$, кратность корня $s = 2$.

Общее решение однородного уравнения

$$y_{OO} = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

Пример 91. (продолжение)

2) Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = x + 1.$$

Характеристика правой части:

$\alpha = 0$ - в правой части нет экспоненты;

$\beta = 0$ - в правой части нет синусов и косинусов;

$l = 1$ - в правой части многочлен первой степени;

$k = 0$ - т.к. среди корней характеристического уравнения нет нулевого корня.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = A + Bx,$$

причем

$$y'_{чн} = B, \quad y''_{чн} = 0.$$

Пример 91. (продолжение)

Подставим в неизвестную функцию $y_{чн}$ и ее производные в дифференциальное уравнение. Имеем

$$-2B + A + Bx = x + 1.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \end{array} \left| \begin{array}{l} -2B + A = 1, \\ B = 1. \end{array} \right. \quad A = 3.$$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{чн} = 3 + x.$$

3) Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = (C_1 + C_2x)e^x + 3 + x.$$

Пример 91. (продолжение)

4) Решим задачу Коши.

Найдем производную

$$y'_{он} = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x) e^x + 1.$$

Подставим начальные условия в выражения для $y_{он}$ и $y'_{он}$.

Получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения произвольных постоянных

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 3, \\ -3 = C_2 + C_1 + 1. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$C_1 = -1, \quad C_2 = -3.$$

Ответ.

$$y = -(1 + 3x)e^x + 3 + x.$$

Пример 92. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y = y_{oo} + u_{чн}$.

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 3 = 0$.

Характеристики корней уравнения $r_1 = 1, \alpha = 1, \beta = 0, s = 1$.

$$r_2 = 3, \alpha = 3, \beta = 0, s = 1.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Пример 92. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Правая часть уравнения $f(x) = xe^x$. Характеристика правой части:

$\alpha = 1$ - коэффициент при x в экспоненте;

$\beta = 0$ - в правой части нет синусов и косинусов;

$l = 1$ - в правой части многочлен первой степени;

$k = 1$ - среди корней характеристического уравнения есть корень с характеристикой $\alpha = 1, \beta = 0$ кратности $s = 1$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x,$$

причем

$$y'_{\text{чн}} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x,$$

$$y''_{\text{чн}} = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Пример 92. (продолжение)

Подставим в неизвестную функцию $y_{\text{чн}}$ и ее производные в дифференциальное уравнение. Имеем

$$\begin{aligned} & 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x - \\ & - 4\left((2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x\right) + 3(Ax^2 + Bx)e^x = \\ & = e^x(-4Ax + 2A - 2B) = xe^x. \end{aligned}$$

Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2A - 2B = 0, \\ -4A = 1. \end{array} \right. \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}.$$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x.$$

Пример 92. (продолжение)

Ответ. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{OH} = y_{OO} + y_{CH} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4} (x^2 + x) e^x.$$

Пример 93. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 2x$.

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y = y_{oo} + y_{чн}$.

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0$.

Характеристика корней уравнения

$$r_{1,2} = -2 \pm 3i, \quad \alpha = -2, \quad \beta = 3, \quad s = 1 \quad (\text{одна пара корней}).$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 93. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 2x$.

Правая часть уравнения $f(x) = 5 \sin 2x$.

Характеристика правой части:

$\alpha = 0$ - в правой части экспонента отсутствует;

$\beta = 2$ - коэффициент при x в синусе;

$l = 0$ - в правой части многочлен нулевой степени;

$k = 0$ - среди корней характеристического уравнения нет корней с характеристикой $\alpha = 0, \beta = 2$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Пример 93. (продолжение)

Найдем производные $y_{чн}$

$$y'_{чн} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad y''_{чн} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

и подставим саму функцию и ее производные в неоднородное дифференциальное уравнение. Имеем

$$\begin{aligned} -4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ + 13(A \cos 2x + B \sin 2x) = 5 \sin 2x. \end{aligned}$$

Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{l} \sin 2x \\ \cos 2x \end{array} \left| \begin{array}{l} -8A + 9B = 5, \\ 9A + 8B = 0. \end{array} \right. \quad A = -\frac{8}{29}, \quad B = \frac{9}{29}.$$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{чн} = -\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

Пример 93. (продолжение)

Ответ. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{OH} = y_{OO} + y_{CH} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

Пример 94. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 4x \sin x.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y = y_{oo} + u_{чн}$.

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$.

Характеристика корней уравнения

$$r_{1,2} = \pm i, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad s = 1 \quad (\text{одна пара корней}).$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пример 94. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' + y = 4x \sin x$.

Правая часть уравнения $f(x) = 4x \sin x$.

Характеристика правой части:

$\alpha = 0$ - в правой части нет экспоненты;

$\beta = 1$ - коэффициент при x в синусе;

$l = 1$ - в правой части многочлен первой степени;

$k = 1$ - среди корней характеристического уравнения есть корень с характеристикой $\alpha = 0, \beta = 1$ кратности $s = 1$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x \left((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \right).$$

Пример 94. (продолжение)

Найдем вторую производную функции $y_{чн}$

$$y''_{чн} = \left(-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D) \right) \cos x + \\ + \left(-Cx^2 - (4A + D)x + (2C - 2B) \right) \sin x.$$

и подставим саму функцию и ее производную в неоднородное дифференциальное уравнение. Имеем

$$\left(2Cx + (A + D) \right) \cos x + \left(-2Ax + (C - B) \right) \sin x = 2x \sin x.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$2C = 0, \quad A + D = 0, \quad -2A = 2, \quad C = B = 0. \quad A = -1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 1.$$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{чн} = x(\sin x - x \cos x).$$

Ответ. Общее решение неоднородного дифференциального

уравнения $y_{он} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\sin x - x \cos x).$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 4275(2, 4, 5), 4276(1, 2), 4279(1)

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальные уравнения»: Задачи 7, 8, 9
2. Задачи из Бермана: Занятие 20