Семинар 17
12.3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами.
Метод вариации произвольных постоянных

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения $y_{oo}(x)$ однородного уравнения и частного решения $y_{чн}(x)$ неоднородного уравнения

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн}.$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Теорема. Если $y_1, \ldots, y_n$ - фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

то частным решением неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x)$ является функция $y_{чн} = C_1(x)\, y_1 + \ldots + C_n(x)\, y_n$, где функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Определитель $W(y_1, \ldots, y_n)$ системы есть определитель Вронского.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами (метод вариации произвольных постоянных)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Структура общего решения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Алгоритм решения сводится к решению трех задач:

1) находим общее решение однородного уравнения;
2) находим частное решение неоднородного уравнения;
3) суммируем эти решения.

Решение первой задачи изложено в пункте 12.3.2.

Для решения второй задачи применяем пункт 12.3.3.

Решение третьей задачи проводится путем суммирования решений двух предыдущих задач.

Пример 89. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Применим предложенный алгоритм.

Пример 89. (продолжение)

1) Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0.$

Корни характеристического $r_{1,2} = \pm i$ уравнения имеют характеристики $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 1$ (одна пара мнимых корней).

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пример 89. (продолжение)

2) Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2,$$

где $y_1 = \cos x,\ \ y_2 = \sin x,$

т.е.

$$y_{чн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Неизвестные функции $C_1(x),\ C_2(x)$ находятся из решения системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Пример 89. (продолжение)

До множим первое уравнение системы на $\cos x$, а второе на $\sin x$. Получим новую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos^2 x + C_2'(x)\sin x\cos x = 0, \\ -C_1'(x)\sin^2 x + C_2'(x)\cos x\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим первое дифференциальное уравнение для нахождения $C_1(x)$

$$C_1'(x)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Подставим $C_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ в первое уравнение системы, получим второе дифференциальное уравнение для нахождения $C_2'(x)$

$$C_2'(x) = \sin x.$$

Пример 89. (продолжение)

Интегрируя, найдем

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Тогда

$$y_{чн} = \left(\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) \cos x - \cos x \sin x.$$

Ответ.

$$y_{он} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) \cos x - \cos x \sin x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos x.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 4275(2), 4275(3), 4268, 4282(2)

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальные уравнения»: Задача 6
2. Задачи из Бермана: Занятие 19