Семинар 16

12.3. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

12.3.1. Линейно независимые системы функций

Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$. Линейной комбинацией их будет $C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$, где $C_1,\ldots,C_n$ - постоянные.

Определение. Система функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ называется ***линейно независимой***, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Т.е. не может быть равенства вида $\varphi_1(x)=C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$.

В частности, $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ линейно независимы, если

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\neq const.$$

Если $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ не есть линейно независимые функции, то они линейно зависимы.

Пример 84. Показать, что функции

$$\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2,\ \varphi_3(x)=x^3,\ \ \varphi_4(x)=2x-x^2$$

линейно зависимы.

Решение. Подберем коэффициенты C_k так, чтобы одна из функций выразилась через линейную комбинацию остальных

$$\varphi_4(x)=2\varphi_1(x)-\varphi_2(x)+0\cdot\varphi_3(x).$$

Ответ. Значит, функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_4(x)$ линейно зависимы.

Теорема. Если $y_1, ..., y_n$ суть n частных линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

то общим решением этого уравнения будет

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + ... + C_n y_n.$$

Условие линейной независимости частных решений дифференциального уравнения – неравенство нулю определителя Вронского (вронскиана)

$$W\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

Линейно независимые решения $y_1, ..., y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения n - го порядка образуют ***фундаментальную систему решений***.

Если заданы начальные условия

$$y(x_0)=y_0,\; y'(x_0)=y_0',\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

то, чтобы из общего решения $y_{\text{оо}}=C_1y_1+\dots+C_ny_n$ получить частное решение, надо решить систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1y_{10}+\dots+C_ny_{n0}=y_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1y_{10}^{(n-1)}+\dots+C_ny_{n0}^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Здесь определитель системы есть $W(y_1,y_2,\dots,y_n)=W_0\neq 0.$

Нулевым начальным условиям соответствует

$C_1=C_2=\dots=C_n=0$ и $y\equiv 0 \quad \forall x\in\langle a,b\rangle.$

12.3.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0.$$

Применим подстановку Эйлера. Ищем решение в виде

$$y=e^{rx},$$

где r - действительное или комплексное число.

$$y'=re^{rx},\;\; y''=r^2e^{rx},\ldots,\;\; y^{(n)}=r^ne^{rx}.$$

Подставим $y, y',\ldots, y^{(n)}$ в дифференциальное уравнение,

получим
$$e^{rx}\left(r^n+a_1r^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}r+a_n\right)=0,\;\; e^{rx}\neq 0.$$

Получили ***характеристическое уравнение***

$$r^n + a_1 r^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Здесь $y^{(k)}$ (k -ой производной функции y) дифференциального уравнения, соответствует r^k характеристического уравнения.

Решая характеристическое уравнение, находим его корни. В общем случае комплексно-сопряженный корень $r = \alpha \pm \beta i$ кратности s.

Характеристика данного корня:

действительная часть корня α,

мнимая часть корня β,

кратность корня s.

Согласно основной теоремы алгебры, уравнение n-ой имеет n корней действительных и комплексно-сопряженных, простых и кратных.

Общее число кратности корней равно n, поэтому решений будет n.

$$s_1 + s_2 + ... + 2s_{m+1} + 2s_{m+2} + ... = n,$$

где $s_1, s_2, ...$ -кратность действительных корней,

$s_{m+1},\ s_{m+2}, ...$ -кратность комплексно-сопряженных корней.

Общая формула: каждой паре комплексно-сопряженных корней $r = \alpha \pm \beta i$ кратности s, (характеристика корня α, β, s) соответствует часть общего решения линейного однородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{оо}} = e^{\alpha x}\left(\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1}\right)\cos\beta x + \right.$$
$$\left. + \left(C_{s+1} + C_{s+2} x + \ldots + C_{2s} x^{s-1}\right)\sin\beta x\right).$$

Частный случай: действительный корень $r = \alpha$ кратности s. В этом случае $\beta = 0$ (характеристика корня α, $\beta = 0$, s). Тогда $\sin\beta x = 0$, $\cos\beta x = 1$ и формула приобретает вид

$$y_{\text{оо}} = e^{\alpha x}\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1}\right).$$

Пример 85. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^2 - 6r + 9 = 0.$

Корень характеристического уравнения $r_{1,2} = 3.$

Характеристика корня:

$$\alpha = 3,\ \beta = 0,\ s = 2.$$

Ответ.

$$y = e^{3x} \cdot \left(C_1 + C_2 x\right).$$

Пример 86. Решите задачу Коши.

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y\big|_{x_0=0} = 2, \; y'\big|_{x_0=0} = -5.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^2 - r - 2 = 0.$

Корни характеристического уравнения $r_1 = 2, \; r_2 = -1.$

Характеристики корней: $r_1 = 2, \; \alpha = 2, \; \beta = 0, \; s = 1;$
$r_2 = -1, \; \alpha = -1, \; \beta = 0, \; s = 1;$

Общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \qquad y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}.$

Из начальных условий $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 2C_1 - C_2 = -5, \end{cases} \quad C_1 = -1, \; C_2 = 3.$

Ответ. Частное решение дифференциального уравнения

$$y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

Пример 87. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 13 = 0.$

Корни характеристического уравнения

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Характеристика корней:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad s = 1 \text{ (одна пара корней)}.$$

Ответ.

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Пример 88. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное пятого порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0.$

Корни характеристического уравнения имеют характеристики

$$r_1 = -1,\ \alpha = -1,\ \beta = 0,\ s = 1,$$

$r_{2,3,4,5} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 2$ (две пары мнимых корней).

Ответ. $$y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 4251, 4254, 4257, 4262, 4301, 4305, 4304, 4310