Семинар 12

12.1.4. Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным, если функция $f(x, y)$ может быть представлена, как функция отношения своих аргументов

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 68. $$\left(xy - y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией измерения m (или степени однородности m)***, если

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y).$$

Пример 69. $f(x,y)=x+3y$

Решение. $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+3\lambda y=\lambda(x+3y)=\lambda f(x,y).$

Однородная функция первого измерения.

Пример 70. $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2$

Решение.

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+4\lambda x\cdot\lambda y+5(\lambda y)^2$$

$$=\lambda^2\left(x^2+4xy+5y^2\right)=\lambda^2 f(x,y).$$

Однородная функция второго измерения.

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

Пример 71. $f\left(x, y\right) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 7xy}$

Решение. $$f\left(\lambda x, \lambda y\right) = \frac{\left(\lambda x\right)^2 - \left(\lambda y\right)^2}{\left(\lambda x\right)^2 + 7\lambda x \cdot \lambda y} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 7xy} = \lambda^0 f\left(x, y\right) = f\left(x, y\right).$$

Однородная функция нулевого измерения (просто однородная функция).

Пример приведения функции

$$f\left(x, y\right) = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + xy} = \frac{1 - \left(y/x\right)^2}{\left(y/x\right)^2 + y/x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ однородная функция нулевого измерения, есть однородное дифференциальное уравнение и его можно преобразовать к уравнению с разделяющимися переменными.

Введем вспомогательную функцию $t = y / x$ или $y = tx$.

$$y' = t'x + t.$$

Тогда $t'x + t = \varphi(t)$, $t'x = \varphi(t) - t$, $\dfrac{dt}{\varphi(t) - t} = \dfrac{dx}{x}$,

$$\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln|x| + C.$$

Вычислив интеграл и перейдя к $y = tx$, получим

$$F(x, y) = \ln|x| + C.$$

Предполагается, что $\varphi(t) - t \neq 0$. Если $\varphi(t) - t \equiv 0$, то

$$t' = 0, \quad t = C, \quad \frac{y}{x} = C, \quad y = Cx.$$

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

Пример 72. $$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Решение. Правая часть уравнения $f(x, y) = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \cdot \lambda y - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 - 2\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \cdot \frac{xy - y^2}{x^2 - xy} = \lambda^0 \cdot f(x, y),$$

есть однородная функция нулевого измерения. Значит данное уравнение есть однородное уравнение. Применим подстановку $y = tx$,

$$y' = t'x + t, \quad t'x + t = \frac{t - t^2}{1 - 2t}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{t - t^2}{1 - 2t} - t\right) = \frac{1}{x}\frac{t^2}{1 - 2t}.$$

Данное уравнение есть уравнением с разделяющимися переменными.

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

Пример 72. (продолжение)

Разделим переменные $$\frac{1-2t}{t^2}dt=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, получим
$$\frac{1}{t}+2\ln|t|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

или $$\ln\left|e^{1/t}t^2\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|\to e^{1/t}t^2=\frac{C}{x}.$$

Окончательно $$\frac{y^2}{x}e^{x/y}=C.$$

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

12.1.5. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $aB - bA \neq 0,$ производят замену переменных

$$\bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0,$$

где x_0, y_0 находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ Ax+By+C=0, \end{cases} \qquad x_0 = -\frac{cB-bC}{aB-bA}, \quad y_0 = -\frac{aC-cA}{aB-bA}.$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к однородному уравнению относительно переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$.

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

2) Если $aB - bA = 0$, производят замену переменных

$$\begin{cases} \overline{x} = x, \\ \overline{y} = ax + by. \end{cases}$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно переменных $\overline{x}, \ \overline{y}$.

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

Пример 73.

$$y' = \frac{-7x+3y-2}{-3x+4y-5}.$$

Решение. $aB - bA = \left(-7\right)\cdot 4 - 3\cdot\left(-3\right) = -19 \neq 0$ - первый случай.

$$x_0 = \frac{-8+15}{19} = \frac{7}{19},\ \ y_0 = \frac{35-6}{19} = \frac{29}{19}.\ \begin{cases} \overline{x} = x - \dfrac{7}{19}, \\ \overline{y} = y - \dfrac{29}{19}, \end{cases} \ \begin{cases} x = \overline{x} + \dfrac{7}{19}, \\ y = \overline{y} + \dfrac{29}{19}. \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{-7\overline{x} + 3\overline{y} - \frac{7\cdot 7}{19} + \frac{3\cdot 29}{19} - 2}{-3\overline{x} + 4\overline{y} - \frac{3\cdot 7}{19} + \frac{4\cdot 29}{19} - 5} = \frac{-7\overline{x} + 3\overline{y}}{-3\overline{x} + 4\overline{y}}, \quad \overline{y}' = \frac{-7\overline{x} + 3\overline{y}}{-3\overline{x} + 4\overline{y}}.$$

Дифференциальное уравнение свелось к однородному дифференциальному уравнению первого порядка, т.к. правая часть однородная функция нулевого измерения.

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

Пример 74. Найти общее решение дифференциального уравнения. $y' = \dfrac{-x + y - 2}{x - y}$.

Решение. $aB - bA = -1(-1) - 1\cdot 1 = 0$ - второй случай.

$$\begin{cases}\bar{x} = x, \\ \bar{y} = -x + y,\end{cases} \quad \begin{cases}x = \bar{x}, \\ y = \bar{y} + \bar{x},\end{cases} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\bar{y} + \bar{x}\right)}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + 1 = \bar{y}' + 1.$$

Дифференциальное уравнение примет вид

$$\bar{y}' + 1 = \frac{\bar{y} - 2}{-\bar{y}} = \frac{2}{\bar{y}} - 1 \quad \text{или} \quad \bar{y}' = \frac{2}{\bar{y}} - 2.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{-\bar{y}d\bar{y}}{1 - \bar{y}} = -2\int dx + C, \qquad \int \frac{\left(1 - \bar{y} - 1\right)d\bar{y}}{1 - \bar{y}} = -2x + C,$$

$$\bar{y} + \ln\left|1 - \bar{y}\right| = -2x + C, \qquad y + \ln\left|1 + x - y\right| = -x + C.$$

Окончательно $\quad y + \ln\left|1 + x - y\right| = -x + C.$

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3934, 3939, 3943

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальные уравнения»: Задача 1
2. Задачи из Бермана: Занятие 14

© Бутырин В.И., Филатов В.В., 2022