# Семинар 11
# 12. Обыкновенные дифференциальные уравнения
## 12.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка
### 12.1.1. Общие понятия

**Определение.** ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** (далее, ***дифференциальным уравнением***) ***1-го порядка*** называется уравнение, связывающее независимую переменную $x$, функцию $y$ и ее производную $y'$.

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка
$F\left(x, y, y'\right) = 0$, $y' = f\left(x, y\right)$ или $f\left(x, y\right)dy = g\left(x, y\right)dx$.

**Определение.** ***Решением дифференциального уравнения 1-го порядка*** называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение превращает его в тождество.

## Пример 60.

Простейшие дифференциальные уравнения:

$$y' = f(x) \quad \text{или} \quad dy = f(x)dx.$$

**Решение.** $y = \int f(x)dx + C$, т.к.

$$y' = \left(\int f(x)dx + C\right)' = f(x) \text{ и } f(x) \equiv f(x).$$

Более сложные дифференциальные уравнения:

$$y' + x^2 y = 0, \qquad xy' - y^2 = 0, \qquad xy' = y + x \qquad \text{и т.д.}$$

или

$$dy + x^2 ydx = 0, \qquad xdy - ydx = 0, \qquad xdy = \left(e^y + x\right)dx \quad \text{и т.д.}$$

**Пример 61.** Найдите решение дифференциального уравнения

$$y' = y.$$

$$y = Ce^{x},$$

Общее решение

где $C$ - произвольная постоянная.

**Пример 62.** Найдите решение дифференциального уравнения

$$y' = -y.$$

Общее решение $y = Ce^{-x}$,

где $C$ - произвольная постоянная.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y).$$

имеет бесчисленное множество решений, которые обычно определяются формулой $y = \varphi(x, C)$, содержащей одну произвольную постоянную. Такое множество решений называют ***общим решением*** дифференциального уравнения. Придавая $C$ определенные (допустимые) значения, получим ***частные решения***.

Общее решение дифференциального уравнения может быть получено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0.$ В этом случае оно называется ***общим интегралом***.

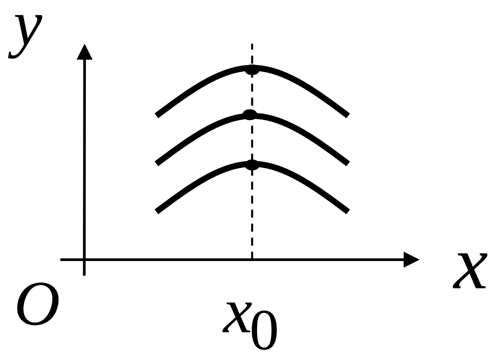
При решении конкретных задач нас будет интересовать частное решение, определяемое ***начальным условием***.

Обычно начальное условие задаются парой значений

в виде $(x_0, y_0)$, $y(x_0) = y_0$, или $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Задача отыскания частного решения по начальному условию называется ***задачей Коши***.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Общее решение – семейство интегральных кривых.




Чтобы отыскать частное решение, нужно в общее решение

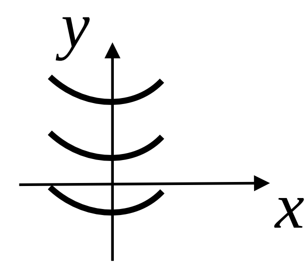
$$y = \varphi(x, C)$$

подставить $x_0, y_0$ из начального условия и разрешить уравнение относительно $C$.

**Пример 63.** Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' = 2x.$

Начальное условие $y(1) = 2.$

**Решение.** Общее решение $y = x^2 + C.$




Действительно,

$$y' = \left(x^2 + C\right)' = 2x + 0 \equiv 2x.$$

Подставим $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ из начального условия в общее решение дифференциального уравнения.

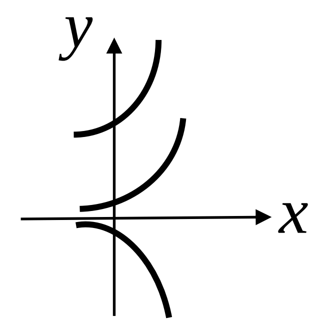
Получим алгебраическое уравнение для определения произвольной постоянной $2 = 1 + C.$

Следовательно, $C = 1.$

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальному условию, будет $y = x^2 + 1.$

**Пример 64.** Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' = y$.

Начальное условие $y(0) = 2$.




**Решение.** Общее решение $y = Ce^x$.

Подставим $x_0 = 0,\ y_0 = 2$ из начального условия в общее решение дифференциального уравнения.

Получим $2 = C$.

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальному условию, будет

$$y = 2e^x.$$

**Пример 65.** Найдите частное решение дифференциального уравнения $$y' = \frac{y+x}{x}, \quad (x>0).$$

Начальное условие $y(1)=0.$

**Решение.** Общее решение $y = x\ln x + Cx.$

Подставим $x_0 = 1,\ y_0 = 0$ из начального условия в общее решение дифференциального уравнения.

Получим $C = 0.$

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям, будет

$$y = x\ln x.$$

## 12.1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Проинтегрировав, получим $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C.$

Если $y(x_0) = y_0$, то $\int\limits_{y_0}^{y} f(y)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\,dx.$

**Пример 66.**

$$3y^2 dy = 2x dx,\;\; y^3 = x^2 + C,\;\; y = \sqrt[3]{x^2 + C}.$$

**Определение.** Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}, \qquad P(x)Q(y)dy+M(x)N(y)dx=0,$$

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C. \qquad \int\frac{Q(y)}{N(y)}dy+\int\frac{M(x)}{P(x)}dx=C.$$

**Внимание!** Может произойти потеря частного решения.

**Внимание!** Решение любых дифференциальных уравнений первого порядка сводится к решению уравнений с разделяющимися переменными.

**Пример 67.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x(y+1)dx-\left(x^2+1\right)ydy=0.$$

**Решение.** Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$P(x)Q(y)dy+M(x)N(y)dx=0,$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{y}{y+1}dy=0, \quad \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\ln C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-y+\ln|y+1|=\ln C, \qquad \frac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Потеряли частное решение $y=-1.$

## 12.1.3. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

**1. Радиоактивный распад.** Экспериментально установлено, что скорость распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества. В момент $t_0 = 0$

$$M = M_0. \quad \frac{dM}{dt} = -kM \quad (k > 0), \quad \frac{dM}{M} = -kdt, \ \ln M = -kt + \ln C,$$

$$M = Ce^{-kt}, \quad M(0) = M_0 \to C = M_0, \qquad M = M_0 e^{-kt}.$$

Период полураспада $T$. Тогда $\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-kT} \to e^{kT} = 2.$

Следовательно

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

$k$ - определяется экспериментально.

**2. Охлаждение тела.** Гипотеза Ньютона: скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела $T$ и температурой окружающей среды $T_c$.

$$T_c = const, \qquad T(0) = T_0.$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c), \ (k > 0), \qquad \frac{dT}{T - T_c} = -kdt,$$

$$\ln(T - T_c) = -kt + \ln C, \ (T > T_c), \qquad T = T_c + Ce^{-kt},$$

$$T(0) = T_0 \to T_0 = T_c + C \to C = T_0 - T_c.$$

Окончательно

$$T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-kt}.$$

# Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3901, 3907, 3910, 3914, 3917