Семинар 10
11. Криволинейные интегралы

11.3. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру

11.4. Формула Грина

11.5. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

11.6. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Примеры

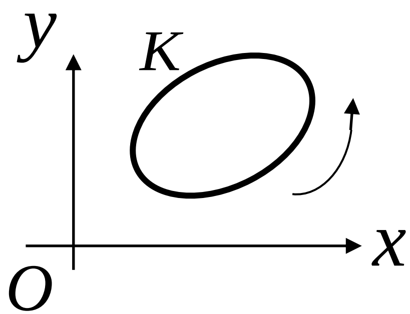
11.7. Криволинейные интегралы второго рода по пространственным линиям

11.8. Приложения криволинейных интегралов второго рода к задачам механики

11.9. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

11.3. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру

Рассмотрим на плоскости Oxy замкнутый контур K. Положительным направлением обхода контура будем считать направление против часовой стрелки и обозначать K. Направление обхода по часовой стрелке будем обозначать $-K$. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру K обозначается

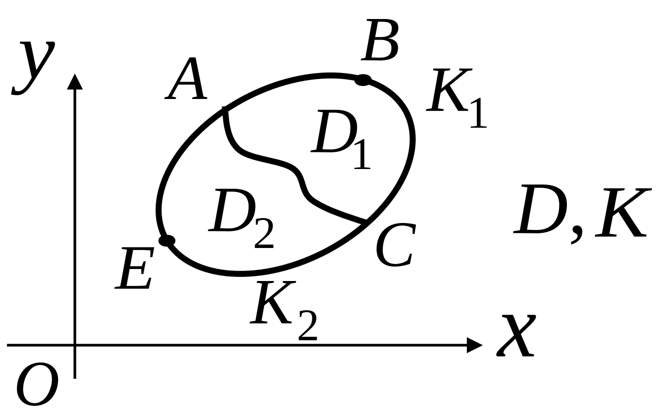


$$\oint_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

$$\oint_{-K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\oint_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Теорема

Если область D, ограниченную замкнутой кривой K, разбить на две части D_1 и D_2, то криволинейный интеграл по всей линии K равен сумме интегралов по линиям $K_1: \ CBAC$ и $K_2: \ AECA$.



11.4. Формула Грина

Теорема

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области D, ограниченной контуром K, то

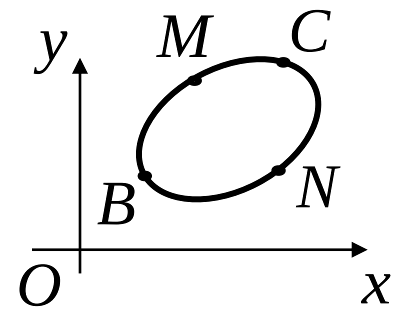
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

11.5. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Физически это означает, что величина работы силового поля не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек.

Лемма. Для того чтобы криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy$$



не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.

Теорема

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области D. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру

$$\oint_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависел от линии интегрирования, лежащей в D, $\forall (x,y) \in D$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Равносильные (эквивалентные) утверждения:

1) Криволинейный интеграл 2-го рода $\oint\limits_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$

взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащим в области $D,$ равен нулю.

2) Криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$

не зависит от линии интегрирования, соединяющих две данные точки.

3) Во всех точках области D $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

11.6. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Примеры

Пример 58. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\oint\limits_K \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

Решение.

Пусть замкнутый контур K не содержит начало координат.

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$$Q=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Следовательно

$$I=\oint\limits_K \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=0.$$

Пример 59. Рассмотрим тот же криволинейный интеграл по замкнутому контуру, содержащему начало координат.

Например, $K:\ x^2+y^2=R^2.$

Решение.

В точке $M(0,0)$ функции $P(x,y),\ Q(x,y)$ и их производные не существуют.

Параметрическое уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$

$$x=R\cos t,\ \ y=R\sin t,\ \ t\in[0,2\pi).$$

Тогда $$dx=-R\sin t\,dt,\ \ dy=R\cos t\,dt.$$

$$I=\oint\limits_K\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{-R\sin t(-R\sin t)+R\cos tR\cos t}{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}dt=\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

11.7. Криволинейные интегралы второго рода по пространственным линиям

Работа силового поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

равна $$A = \int\limits_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Пусть $K = BC$ гладкая кривая

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t), \qquad t \in [t_B, t_C].$$

Тогда $$A = \int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt.$$

Определение

Трехмерная область Ω называется ***поверхностно односвязной***, если любой простой замкнутый кусочно-гладкий контур, принадлежащий Ω, можно стянуть в точку, лежащую в Ω.

Примеры

Односвязная поверхность: шар, эллипсоид.

Не односвязная поверхность: тор.

Теорема

Пусть функции P, Q, R непрерывны вместе со своими производными в поверхностно односвязной области Ω.

Тогда равносильны утверждения:

1) Криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz$, взятый по любому замкнутому контуру равен нулю.

2) Криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz$, не зависит от линии интегрирования.

3) $\forall (x, y, z) \in \Omega \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}.$

11.8. Приложения криволинейных интегралов второго рода к задачам механики

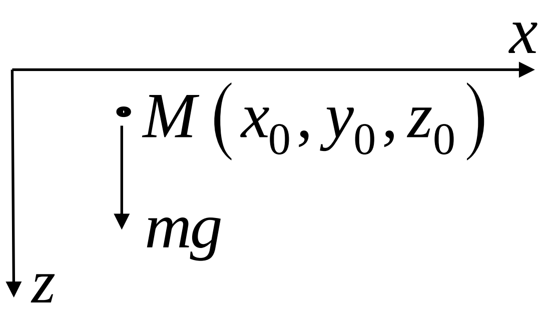
1) Работа силового поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$

Если $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

то работа не зависит от пути интегрирования.

2) Поле тяжести. $\vec{F} = (P,Q,R) = (0,0,mg),\ d\vec{l} = (0,0,dz),$

$$P'_y = Q'_x = 0,\quad Q'_z = R'_y = 0,\quad R'_x = P'_z = 0.$$



$$A = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} mgdz = mg\int_{z_0}^{z} dz = mgz - mgz_0.$$

11.9. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

$$\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz = \left| dx = dl\cos\alpha,\ dy = dl\cos\beta,\ \ dz = dl\cos\gamma \right| =$$

$$= \int\limits_K \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) dl.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3822, 3824

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задача 11, 12.
2. Задачи из Бермана: Занятия 10, 11.