Семинар 9

11. Криволинейные интегралы

11.2. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам)

11.2.1. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

11.2.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры

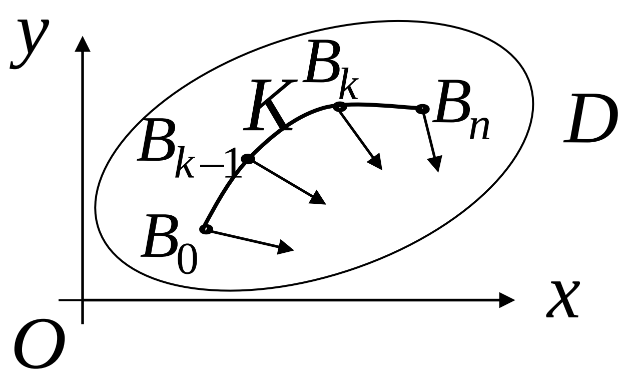
11.2. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам)

Задача о работе силового поля

Предположим, что в области D задано плоское силовое поле, т. е. на материальную точку в D действует сила $\vec{F}$, определенная для всякой точки: $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$. Считаем, что поле стационарное (не зависит от времени t)

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}, \quad (x, y) \in D.$$

Пусть материальная точка движется по линии K.



Работа на отрезке $\overrightarrow{B_{k-1}B_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$ равна

$$\Delta A_k = P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$$

Просуммируем по всем отрезкам

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$$

Выражение в правой части называется интегральной суммой по линии K.

Переходя к пределу получим величину работы

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta l_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$$

Определение

Криволинейным интегралом второго рода по линии K называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой K

$$\lim_{\substack{\max \Delta l_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k = \int_K P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy.$$

В частности, если $Q(x,y)\equiv 0$, то интеграл примет вид

$$\int\limits_K P(x,y)\,dx$$

и называется криволинейным интегралом по координате x.

Если $P(x,y)\equiv 0$, то интеграл примет вид

$$\int\limits_K Q(x,y)\,dy$$

и называется криволинейным интегралом по координате y.

Работа силового поля $\overrightarrow{F}$ по кривой K есть

$$\int\limits_K P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - проекции силового поля на оси координат Ox и Oy соответственно.

11.2.1. Вычисление криволинейного интеграла второго рода (*сводится к вычислению определенных интегралов*)

Например, вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$\int_K P(x, y)\,dx$$

от точки B до точки C по линии K, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны со своими производными.

$$\int_K P(x, y)\,dx = \int_{t_B}^{t_C} P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Аналогично

$$\int_K Q(x, y)\,dy = \int_{t_B}^{t_C} Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\,dt.$$

Правило

Вычисление криволинейного интеграла второго рода от точки B до точки C по линии $K: \quad x = x(t),\ y = y(t)$ производится по формуле

$$\int\limits_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

Если уравнение линии задано в явном виде $y = y(x)$, то, полагая $x = t$, имеем

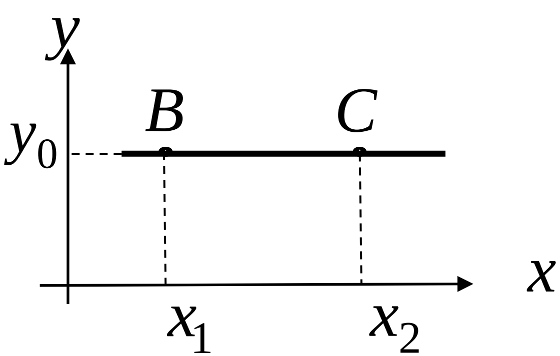
$$\int\limits_{K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_B}^{x_C} \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)\, y'(x) \Big) dx.$$

Если линия задана уравнениями разных видов, то линию нужно разбить на отдельные участки интегрирования.

11.2.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры

Пример 51. Записать криволинейный интеграл второго рода от точки ***B*** до точки ***C***.



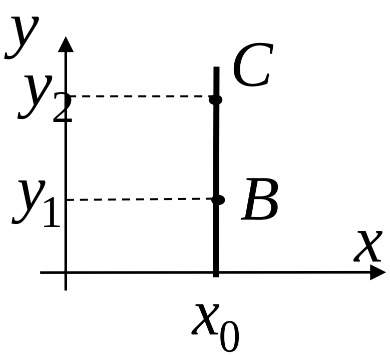
$$K: \quad y = y_0, \; x \in [x_1, x_2].$$

Решение.

$$dy = 0$$

$$\int_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_0)\,dx.$$

Пример 52. Записать криволинейный интеграл второго рода от точки ***B*** до точки ***C***.



$$K: \ x = x_0, \ y \in [y_1, y_2].$$

Решение.

$$dx = 0$$

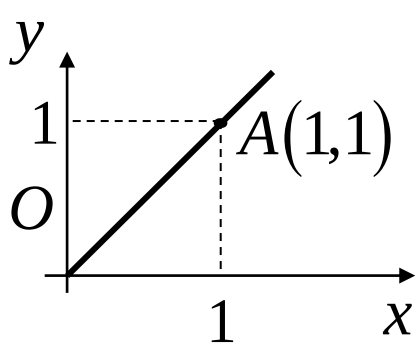
$$\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)dy.$$

Пример 53. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_K xydx+(x+y)dy$$

от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по линии $K:\ y=x.$

Решение.



$$dy=dx$$

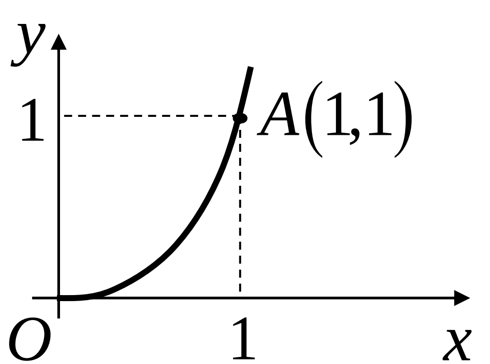
$$I=\int\limits_0^1\left(x^2+2x\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right|_0^1=\frac{4}{3}.$$

Пример 54. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_K xydx + (x+y)dy$$

от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по линии $K: \quad y = x^2.$

Решение.



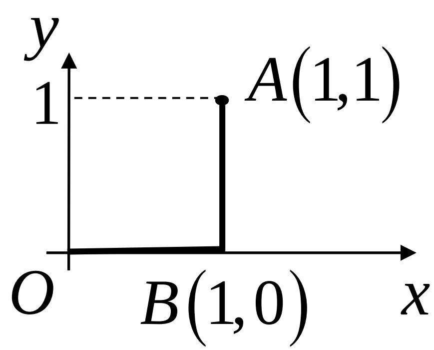
$$dy = 2xdx$$

$$I = \int_0^1 \left(x^3 + 2x\left(x + x^2\right)\right)dx = \frac{17}{12}.$$

Пример 55. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{OBA} xydx + (x+y)dy$$

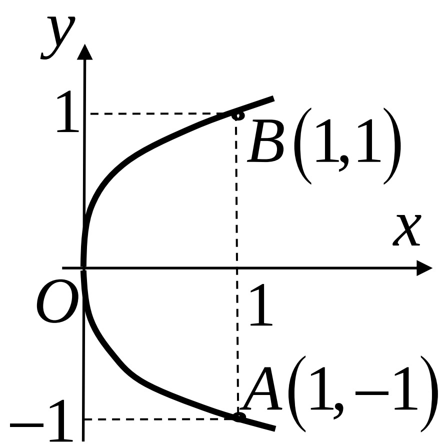
от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по пути OBA, где линия OB задана уравнением $y=0$ $(dy=0)$, а линия BA задана уравнением $x=1$ $(dx=0)$.



Решение.

$$I = \int\limits_0^1 (1+y)dy = \left.\frac{(1+y)^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Пример 56. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I=\int\limits_K xydx$ от точки $A(1,-1)$ до точки $B(1,1)$ по линии $K:\ x=y^2.$



Решение. Рассмотрим два случая:

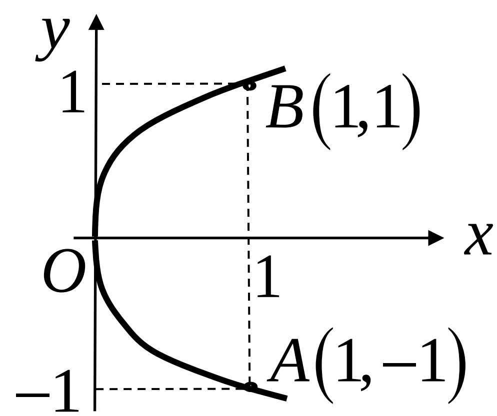
А) Проинтегрируем по $dy.$

Тогда $K:\quad x=y^2.$

Дифференциал $dx=2ydy.$

$$I=\int\limits_{-1}^{1} y^2 y\cdot 2ydy=\left.\frac{2y^5}{5}\right|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Пример 56. Продолжение



Б) Проинтегрируем по $dx.$

На участке AO уравнение линии будет $y = -\sqrt{x}.$
На участке OB уравнение линии будет $y = \sqrt{x}.$
Интеграл I можно представить в виде суммы интегралов

$$I = \int\limits_{AO} xydx + \int\limits_{OB} xydx = -\int\limits_1^0 x\sqrt{x}dx + \int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx =$$

$$= \left| -\int\limits_1^0 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx \right| = 2\int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{4}{5}.$$

Пример 57. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_K y dx - x dy$$

от точки $O(0,0)$ до точки $A(4\pi,0)$, где K одна арка циклоиды

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решение. Параметр t изменяется от 0 до 2π.

$$I = \int_0^{2\pi} \left[4(1-\cos t)^2 - 4(t - \sin t)\sin t \right] dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (2 - 2\cos t - t\sin t)\, dt = 4\left[2t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} - (-t\cos t + \sin t)\Big|_0^{2\pi} \right] = 24\pi.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3810, 3811-1, 3813, 3816

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задача 13.