Семинар 8

11. Криволинейные интегралы

11.1. Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода)

11.1.1. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

11.1.2. Приложения криволинейного интеграла первого рода

11.1. Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода)

Дифференциал длины дуги в плоском случае для линии, заданной уравнением $y = y(x)$, равен

$$dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

Дифференциал длины дуги в пространственном случае для линии, заданной уравнениями $y = y(x),\ z = z(x)$, равен

$$dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2 + \left(z'(x)\right)^2}\,dx.$$

При параметрическом задании линии

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\quad z = z(t)$$

дифференциал длины дуги в плоском случае равен

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt,$$

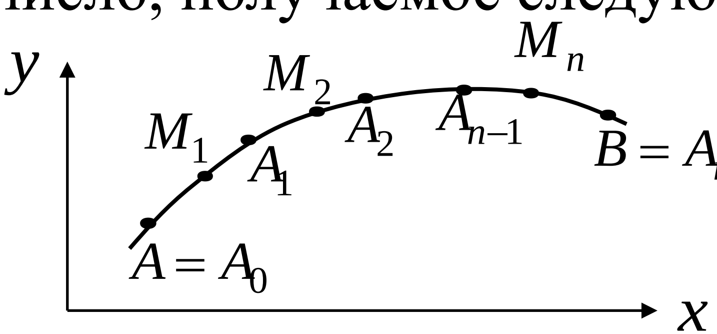
а в пространственном случае

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

Определение

Криволинейным интегралом первого рода $\int\limits_K f(x,y)\,dl$

от функции двух переменных $f(x,y)$ (заданной в некоторой связной области), взятым по отрезку $K = AB$ плоской кривой (этот отрезок находится в той же области и называется путем интегрирования), заданной своим уравнением, называется число, получаемое следующим образом:



$$\int\limits_K f(x,y)\,dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i .$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции трех переменных $f(x, y, z)$, взятый по отрезку K пространственной кривой

$$\int\limits_K f(x, y, z)\,dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i.$$

11.1.1. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

1) Если уравнения пути интегрирования заданы в параметрической форме $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (t_0, t_1)$, то

$$\int\limits_K f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt. \qquad (*)$$

Для пространственной кривой $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in (t_0, t_1)$

$$\int\limits_K f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt. \qquad (**)$$

Здесь значение параметра t_0 берется для точки A,
значение параметра t_1 берется для точки B.
Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $t_0 < t_1$.

2) Если уравнения пути интегрирования заданы в явном виде $y = y(x)$ для плоской кривой (для пространственной кривой $y = y(x),\ z = z(x)$), то

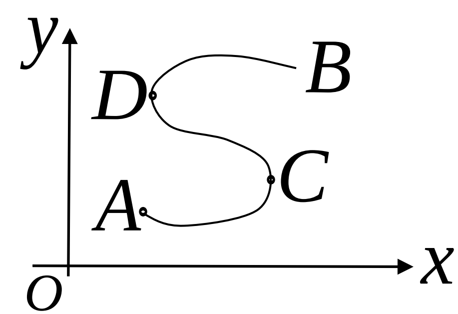
$$\int_K f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \qquad (***)$$

$$\int_K f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x, y(x), z(x))\sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\,dx. \qquad (****)$$

Здесь значение $x = a$ берется для точки A, значение $x = b$ берется для точки B. Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $a < b$.

Замечание.

Пусть кривая такова, что для заданного x координата y принимает несколько значений, например:



Тогда кривую нужно разбить промежуточными точками на отрезки таким образом, чтобы для каждого отрезка выполнялось взаимно однозначное соответствие между x и y, и интегрировать в сторону увеличения координаты x.

Для данного примера криволинейный интеграл 1-го рода примет вид

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{DC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{DB} f(x,y)\,dl.$$

11.1.2. Приложения криволинейного интеграла первого рода

1) Длина криволинейного отрезка K:

$$L = \int\limits_K dl.$$

2) Масса криволинейного отрезка K переменной плотности $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$M = \int\limits_K \gamma(x, y, z)\, dl.$$

Пример 48.

Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_K y\,dl,$

где K- дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(4,\sqrt{8}\right)$.

Удобно задать уравнение параболы в виде $x = \dfrac{y^2}{2}$ и вычислять интеграл по координате y.

Производная равна $x' = y$. Интеграл примет вид

$$I = \int\limits_K y\,dl = \int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+\left(x'\right)^2}\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}\,dy = \left.\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{\sqrt{8}} = \frac{26}{3}.$$

Пример 49.

Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_K \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$,

где K - первый виток винтовой линии

$$x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = at, \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

$$dl = \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 + \left(z_t'\right)^2}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2}\,dt = a\sqrt{2}dt$$

Интеграл примет вид

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2 \cdot a\sqrt{2}dt}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \int\limits_0^{2\pi} t^2 a\sqrt{2}dt = a\sqrt{2}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3.$$

Пример 50.

Вычислить массу дуги кривой ***K***: $\rho = e^{3\varphi/4}, \ \ 0 \le \varphi \le 4\pi / 7. \ \ \gamma = \rho^{4/3}.$

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'\right)^2} d\varphi, \quad \rho' = \frac{3}{4} e^{3\varphi/4}.$$

$$dl = \sqrt{e^{6\varphi/4} + \frac{9}{16} e^{6\varphi/4}} d\varphi = \frac{5}{4} e^{3\varphi/4} d\varphi.$$

Интеграл примет вид

$$M = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \gamma dl = \frac{5}{4} \int_{0}^{4\pi/7} e^{\varphi} \cdot e^{3\varphi/4} d\varphi = \frac{5}{4} \int_{0}^{4\pi/7} e^{7\varphi/4} d\varphi =$$

$$== \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{7} \int_{0}^{4\pi/7} e^{7\varphi/4} d\left(\frac{7}{4}\varphi\right) = \frac{5}{7} e^{7\varphi/4} \Big|_{0}^{4\pi/7} = \frac{5}{7}\left(e^{\pi} - 1\right).$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3770, 3775, 3779, 3781, 3783, 3784, 3792

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задача 12.
2. Задачи из Бермана. Занятие 10.