Семинар 7

10. Тройной интеграл

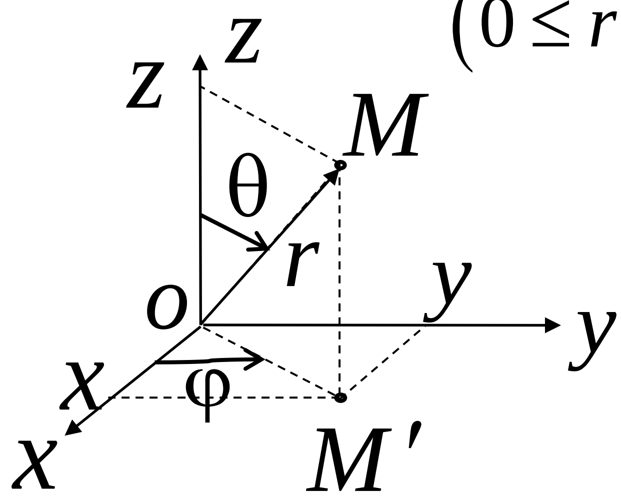
10.5. Вычисление тройных интегралов в сферических координатах

10.6. Приложения тройных интегралов

10.5. Вычисление тройных интегралов в сферических координатах

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$$

$$\left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\right).$$



Якобиан преобразования вычисляется по формуле

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Тройной интеграл в сферических координатах примет вид

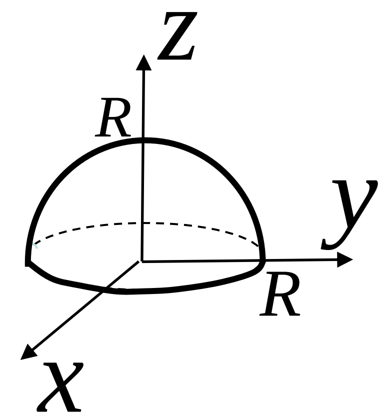
$$\iiint\limits_{T} f\left(x,y,z\right)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{T^*} f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right)r^2\sin\theta d\varphi dr d\theta,$$

где T^* - область изменения координат $r, \varphi, \theta.$

Пример 47.

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T \left(x^2+y^2\right)dv,$



где область T - верхняя половина шара

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,\ \ J = r^2\sin\theta.$$

Для данной области интегрирования, переменные изменяются в пределах: $0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}.$

Пример 47. Продолжение

Интеграл запишется в виде:

$$I=\iiint\limits_{T}\left(x^2+y^2\right)dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}r^4dr\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=$$

$$=2\pi\frac{R^5}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta-1\right)d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=2\pi\frac{R^5}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi R^5.$$

10.6. Приложения тройных интегралов

1) Масса тела T переменной плотности $\gamma(x, y, z)$.
Массу тела M можно вычислить по формуле

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\,dv.$$

2) Статические моменты инерции тела T относительно координатных плоскостей $Oxy,\ Oxz,\ Oyz$:

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x, y, z)\,dv, \qquad M_{xz} = \iiint\limits_T y\gamma(x, y, z)\,dv,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x, y, z)\,dv.$$

3) Координаты центра тяжести тела T :

$$x_{цт} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dv}, \quad y_{цт} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dv},$$

$$z_{цт} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dv}.$$

4) Моменты инерции тела T относительно координатных осей:

$$J_x = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\left(y^2 + z^2\right)dv,$$

$$J_y = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right)dv,$$

$$J_z = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right)dv.$$

5) Центробежные моменты инерции тела T:

$$J_{xy} = \iiint_T xy\gamma(x, y, z)\,dv, \quad J_{xz} = \iiint_T xz\gamma(x, y, z)\,dv,$$

$$J_{yz} = \iiint_T yz\gamma(x, y, z)\,dv.$$

6) Полярный момент инерции тела T:

$$J_0 = \iiint_T \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\,dv.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3555, 3556, 3557,
3559, 3564, 3565, 3573, 3588, 3649, 3610, 3669, 3691

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задача 8.
2. Задачи из Бермана. Занятия 8, 9.