

Семинар 6

10. Тройной интеграл

10.1. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл

10.2. Свойства тройных интегралов

10.3. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

10.4. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах

10.1. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл

Рассмотрим тело T переменной плотности

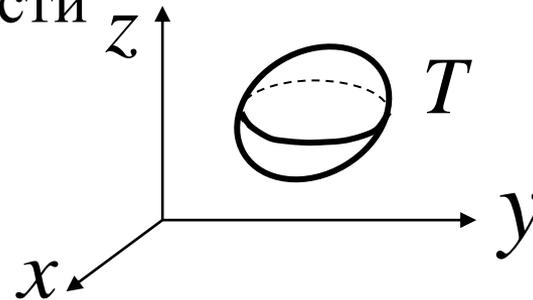
$$\gamma = \gamma(x, y, z).$$

Дифференциал массы равен

$$dM = \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Масса тела равна

$$M = \iiint_T \gamma(x, y, z) dv.$$



Вообще, тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области T называется предел интегральной суммы

$$\iiint_T f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta v_k.$$

Этот предел не зависит ни от способа разбиения тела, ни от выбора точек разбиения (x_k, y_k, z_k) .

10.2. Свойства тройных интегралов

Свойства двойных интегралов переносятся на тройные интегралы

$$1) \quad \iiint_T (f_1(x, y, z) \pm \dots \pm f_n(x, y, z)) dv = \\ = \iiint_T f_1(x, y, z) dv \pm \dots \pm \iiint_T f_n(x, y, z) dv.$$

$$2) \quad \iiint_T cf(x, y, z) dv = c \iiint_T f(x, y, z) dv.$$

$$3) \quad T = T_1 \cup T_2, \quad T_1 \cap T_2 = \emptyset. \quad \text{Тогда}$$

$$\iiint_T f(x, y, z) dv = \iiint_{T_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{T_2} f(x, y, z) dv.$$

4) Если $\forall (x, y, z) \in T \quad f_1(x, y, z) \geq f_2(x, y, z)$,

то
$$\iiint_T f_1(x, y, z) dv \geq \iiint_T f_2(x, y, z) dv.$$

5) Если $m = f_{\text{наим}}$ в T , $M = f_{\text{наиб}}$ в T ,

то
$$mV \leq \iiint_T f(x, y, z) dv \leq MV, \quad \text{где } V = \iiint_T dv.$$

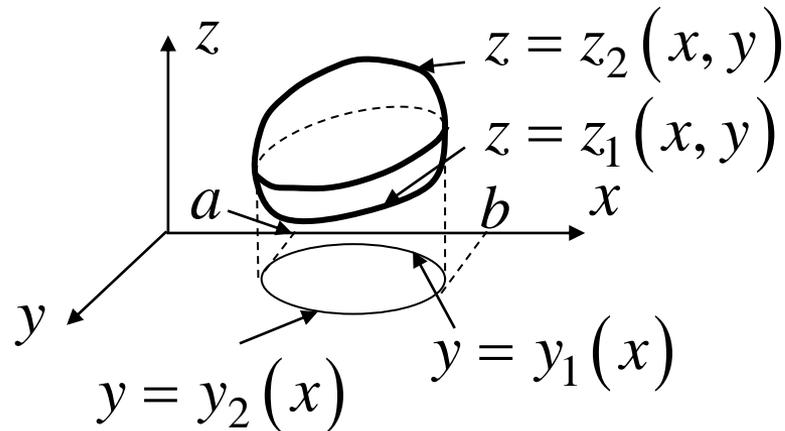
6)
$$\iiint_T f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta)V, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in T,$$

$f(\xi, \eta, \zeta)$ - среднее значение f в области T .

10.3. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

$$I = \iiint_T f(x, y, z) dv.$$

Правило вычисления тройного интеграла



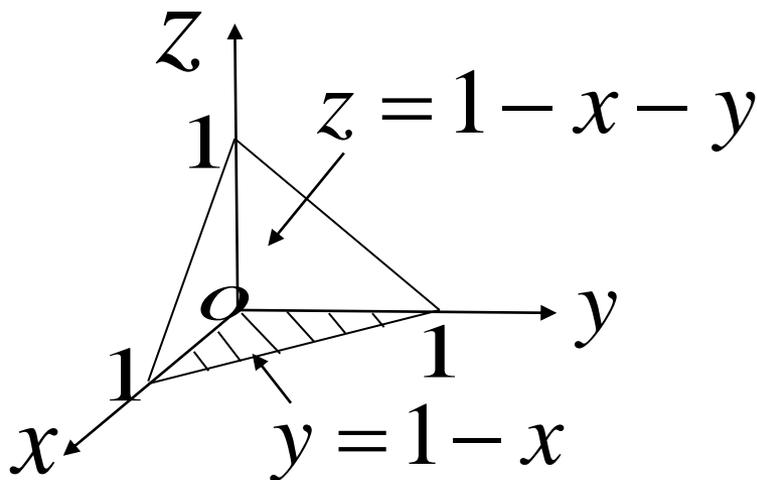
$$I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Пример 45. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint_T (x + y + z) dx dy dz$

по области T , ограниченной плоскостями:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Построим область интегрирования:



$$T : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1 - x; \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y. \end{cases}$$

Пример 45. Продолжение

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 dx \left(-\frac{x^2}{2} y - x \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2} y \right) \Big|_0^{1-x} = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

10.4. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty).$$

Замена переменных в тройном интеграле производится на тех же принципах, что и в двойном интеграле.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет

$$\text{вид} \quad \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d\varphi dr dz.$$

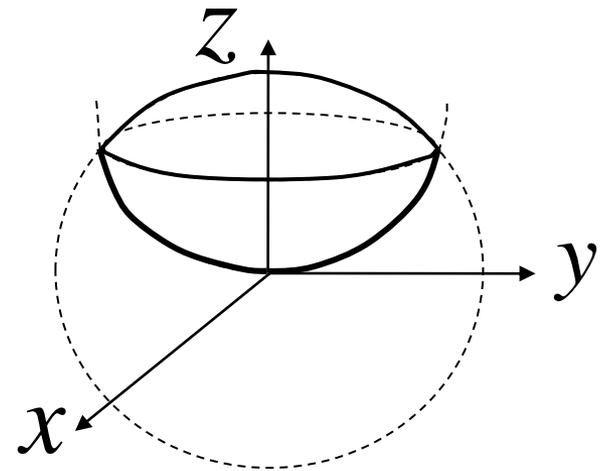
Пример 46. Вычислить тройной интеграл $\iiint_T z dv$ по области,

ограниченной поверхностями

$$T : \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

Решение.

Перейдем к цилиндрическим координатам:



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad J = r.$$

Пример 46. Продолжение

Уравнение параболоида примет вид:

$$z = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \rightarrow z = r^2.$$

Уравнение верхней полусферы примет вид:

$$r^2 + z^2 = 6 \rightarrow z = \sqrt{6 - r^2}.$$

Линией пересечения поверхностей $z = r^2$ и $z = \sqrt{6 - r^2}$ является окружность радиуса

$$r = \sqrt{2} \quad \left(r^2 + r^4 = 6 \right).$$

Пример 46. Продолжение

Переменные изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{6-r^2}.$$

Интеграл запишется в виде:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T z dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r dr \frac{z^2}{2} \Big|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (6 - r^2 - r^4) r dr = \frac{11}{3} \pi. \end{aligned}$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3517, 3518, 3521, 3523, 3548,
3551, 3553

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задача 10.
2. Задачи из Бермана. Занятия 6, 7.