Семинар 5

9. Двойной интеграл

9.4. Замена переменных в двойном интеграле

9.5. Двойной интеграл в полярных координатах

9.6. Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры

9.7. Обобщенные полярные координаты. Приложения двойных интегралов

9.4. Замена переменных в двойном интеграле

При переходе от переменных x, y к переменным u, v

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (x,y)\in D, \quad (u,v)\in D^*,$$

двойной интеграл примет вид

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} z\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|J\right|dudv,$$

где J - ***функциональный определитель Якоби*** (якобиан).

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

1) область D заменяем на D^*;

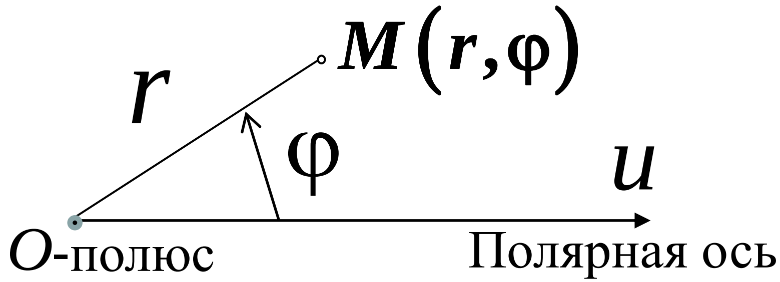
2) $d\sigma = \left|J\right| dudv$ - дифференциал площади в координатах u, v.

Предполагается, что функции

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$$

непрерывны со своими частными производными в D^*.

9.5. Двойной интеграл в полярных координатах



$r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ - полярный радиус;

$\varphi(M)$ - полярный угол, принимает бесконечное множество значений отличающихся друг от друга на $2k\pi$;

Значение φ: $0 \le \varphi < 2\pi$ - называют главным значением (иногда: $-\pi < \varphi \le \pi$);

Положение любой точки определяется заданием r, φ

$$\left(0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\right).$$

Связь декартовых и полярных координат (полюс совпадает с началом координат, полярная ось совпадает с положительной полуосью осью Ox) :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ (r,\varphi) \in D^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

Вычислим якобиан:

$$J = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

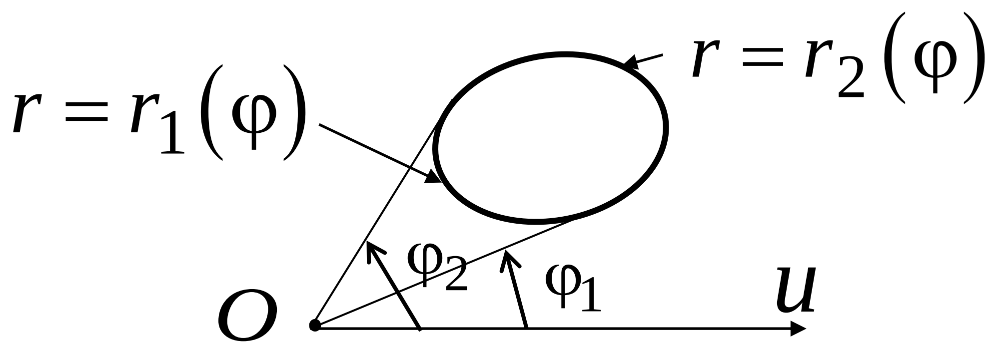
Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D в полярных координатах примет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

9.6. Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры

Пример 39. Записать двойной интеграл в полярных координатах, когда полюс не содержится внутри области D.

Решение:

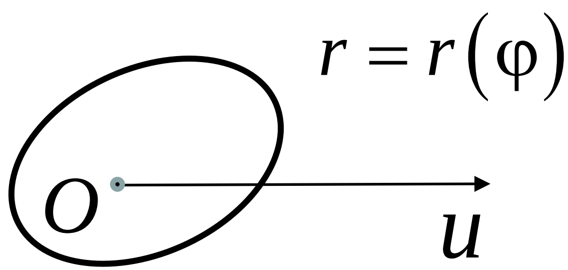


Ответ:

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Пример 40. Записать двойной интеграл в полярных координатах, когда полюс содержится внутри области D.

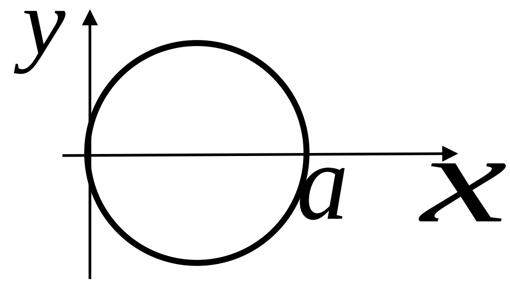
Решение:



Ответ: $$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr.$$

Пример 41. Записать двойной интеграл в полярных координатах

$$D:\ x^2+y^2\le ax.$$



Решение. Введем полярные координаты

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ J=r.$$

Уравнение границы примет вид $r^2=ar\cos\varphi$

или $r=a\cos\varphi.$

Тогда

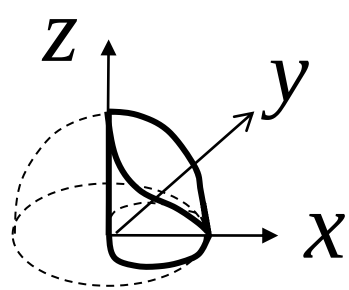
$$D^*:\ \begin{cases}-\pi/2\le\varphi\le\pi/2,\\ 0\le r\le a\cos\varphi\end{cases}$$

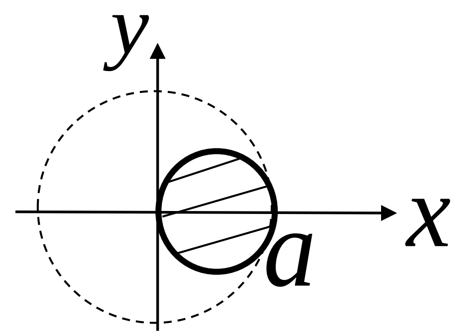
Ответ. $$I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{a\cos\varphi}f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)rdr.$$

Пример 42. Найти объем общей части шара радиуса $r_1 = a$ с центром в начале координат и цилиндра радиуса $r_2 = a/2$, уравнения оси которого $x = a/2,\ y = 0.$

Решение.

На рисунке изображена верхняя половина объема.





Область интегрирования есть проекция тела на опорную плоскость Oxy.

Так как областью интегрирования является круг, то удобно перейти к полярным координатам (см. пример 41).

Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

для верхней полусферы имеем

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$$

Пример 42. Продолжение

Так как фигура симметрична относительно опорной плоскости и относительно плоскости Oxz, то можно рассмотреть четверть объема и результат умножить на четыре

$$V=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=-2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,d\left(a^2-r^2\right)=$$

$$=-4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\left.\frac{\left(a^2-r^2\right)^{3/2}}{3}\right|_0^{a\cos\varphi}=-\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left(a^3\sin^3\varphi-a^3\right)d\varphi=$$

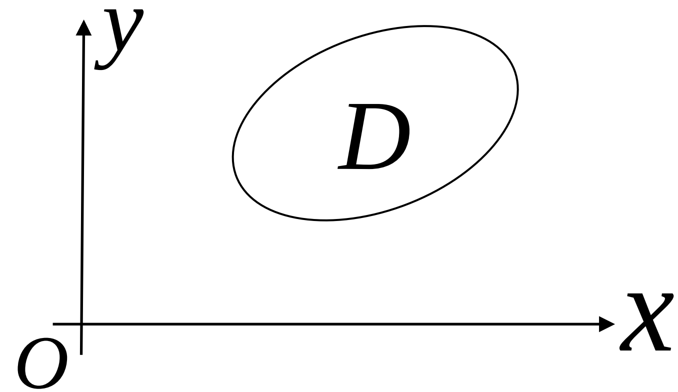
$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

9.7. Обобщенные полярные координаты. Приложения двойных интегралов

Пример 43.

Найти массу плоской пластинки поверхностной плотностью

$$\mu(x, y).$$

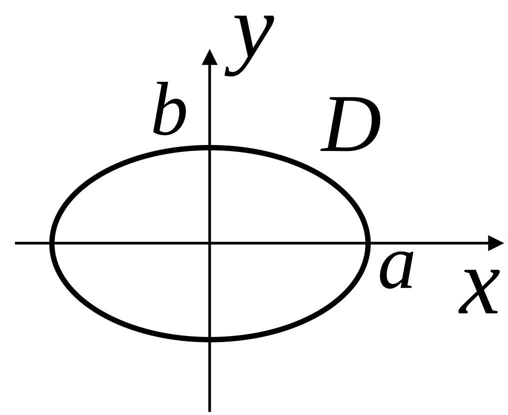


Решение. Дифференциал массы равен

$$dM = \mu(x, y)\,d\sigma .$$

Масса всей пластинки равна $M = \iint\limits_D \mu(x, y)\,d\sigma.$

Если областью интегрирования является эллипс или часть его, то используют обобщенные полярные координаты



$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi, \qquad J = abr. \\ (r,\varphi) \in D^* \end{cases}$$

Двойной интеграл преобразуется к виду

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} z(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,abrd\varphi dr.$$

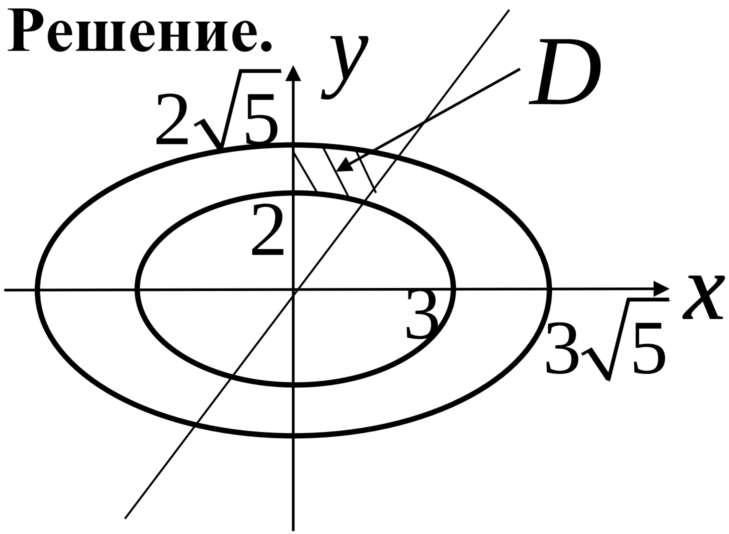
Пример 44. Найти массу плоской пластинки поверхностной плотностью

$$\mu(x,y)=\frac{x}{y},$$

в области D:

$$1\le\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 5;\quad y\ge\frac{2x}{3};\quad x\ge 0.$$

Решение.



Область интегрирования – часть эллипса. Введем обобщенные полярные координаты:

$$\begin{cases} x=3r\cos\varphi, \\ y=2r\sin\varphi, \end{cases}\quad J=6r.$$

Пример 44. Продолжение

Поверхностная плотность $\mu = \dfrac{x}{y} = \dfrac{3r\cos\varphi}{2r\sin\varphi} = \dfrac{3}{2}\operatorname{ctg}\varphi.$

Определим, как изменяется φ :

$$y = \frac{2x}{3} \Rightarrow 2r\sin\varphi = \frac{2\cdot 3r\cos\varphi}{3} \Rightarrow \sin\varphi = \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\pi/4 \le \varphi \le \pi/2.$$

Определим, как изменяется r:

$$1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 5 \Rightarrow 1 \le \frac{9r^2\cos^2\varphi}{9} + \frac{4r^2\sin^2\varphi}{4} \le 5 \Rightarrow 1 \le r^2 \le 5 \Rightarrow$$

$$1 \le r \le \sqrt{5}.$$

Пример 44. Продолжение

Запишем интеграл

$$M = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{3}{2}\operatorname{ctg}\varphi \cdot 6r dr = 9\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}\varphi d\varphi \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} r dr =$$

$$= 9\ln\left|\sin x\right|\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_{1}^{\sqrt{5}} = \frac{9}{2}\left(-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(5-1) =$$

$$= \frac{9}{2}\ln\sqrt{2}\cdot 4 = 9\ln 2.$$

Ответ. $M = 9\ln 2.$

9.7. Приложения двойных интегралов

Статические моменты инерции и центр тяжести пластинки

$$M_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(x_k, y_k) \Delta\sigma_k, \quad M_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(x_k, y_k) \Delta\sigma_k.$$

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)\,d\sigma, \qquad M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)\,d\sigma.$$

$$x_{ц.т.} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma}, \quad y_{ц.т.} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma}.$$

Моменты инерции пластинки:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 d\sigma, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 d\sigma.$$

Центробежный момент инерции

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy d\sigma.$$

Полярный момент инерции относительно оси Oz

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) d\sigma = I_x + I_y.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3536, 3538, 3540, 3544

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задачи 7, 9
2. Задачи из Бермана. Занятие 5