Семинар 4

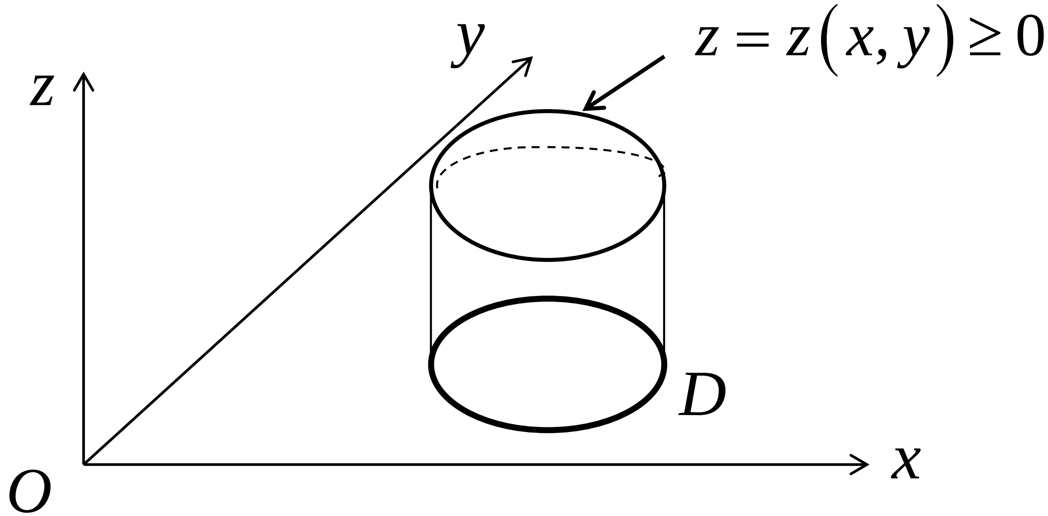
9. Двойной интеграл

9.1. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл

9.2. Свойства двойных интегралов

9.3. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах. Примеры

9.1. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл



Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное замкнутой областью D плоскости Oxy, поверхностью $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, и цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей – границей области D.

Определение

Двойным интегралом от функции $z(x,y)$ по области D называется выражение

$$\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma.$$

Здесь

$z(x,y)\,d\sigma$ – подынтегральное выражение;

$z(x,y)$ – подынтегральная функция;

$d\sigma$ – дифференциал площади;

D – область интегрирования.

Геометрический смысл двойного интеграла

Объем цилиндрического тела при $z = z(x, y) \geq 0$

$$V = \iint\limits_{D} z(x, y)\, d\sigma.$$

9.2. Свойства двойных интегралов

1) $$\iint\limits_D \left(z_1(x,y) \pm \ldots \pm z_n(x,y)\right) d\sigma = \iint\limits_D z_1(x,y)\,d\sigma \pm \ldots \pm \iint\limits_D z_n(x,y)\,d\sigma.$$

2) $$\iint\limits_D cz(x,y)\,d\sigma = c\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma.$$

3) Если $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} z(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} z(x,y)\,d\sigma.$$

4) Если $\forall(x,y)\in D$ $z_1(x,y)\geq z_2(x,y)$, то

$$\iint\limits_D z_1(x,y)\,d\sigma \geq \iint\limits_D z_2(x,y)\,d\sigma.$$

5) Если $m = z_{\text{наим}}$ в D, $M = z_{\text{наиб}}$ в D, то

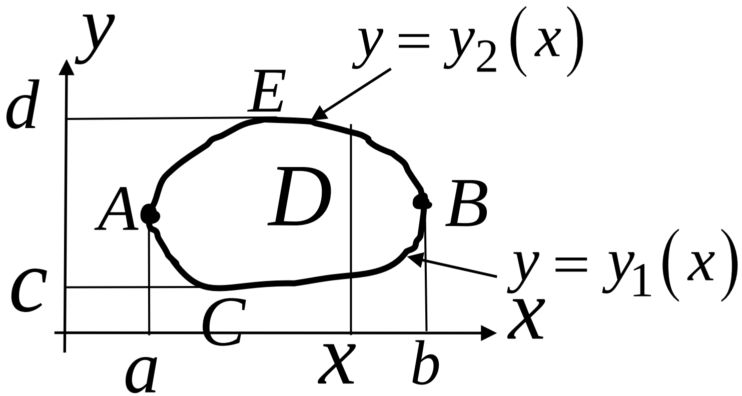
$$mS \leq \iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma \leq MS\,,$$ где $S = \iint\limits_D d\sigma$ - площадь D.

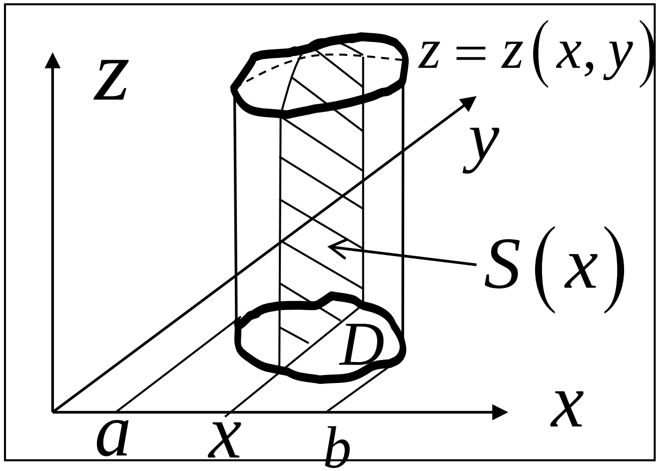
6) $$\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma = z(\xi,\eta)S, \quad (\xi,\eta)\in D,$$

где $z(\xi,\eta)$ - среднее интегральное значение z в области D.

9.3. Вычисление двойных интегралов

Предположим, что любая прямая, параллельная осям Ox или Oy, и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границу области D ровно в двух точках.





$$S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\,dy. \qquad (*)$$

Здесь при вычислении интеграла по dy считается, что $x = \text{const}$.

$$V=\iint\limits_{D} z(x,y)\,dxdy=$$

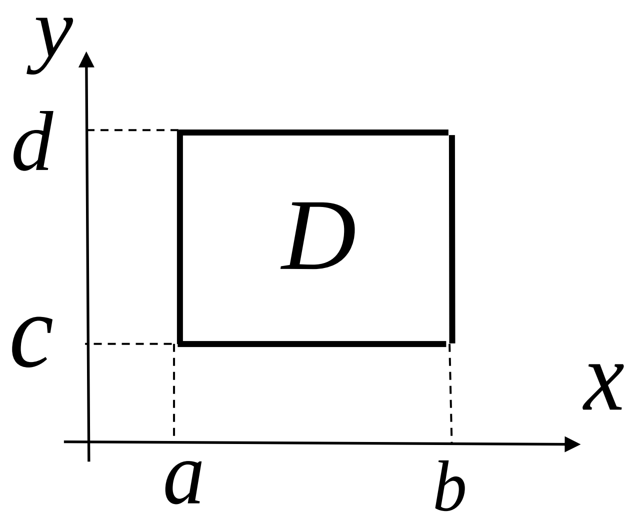
$$=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy. \qquad (**)$$

Изменив порядок интегрирования, аналогично получим

$$\iint\limits_{D} z(x,y)\,dxdy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx. \qquad (***)$$

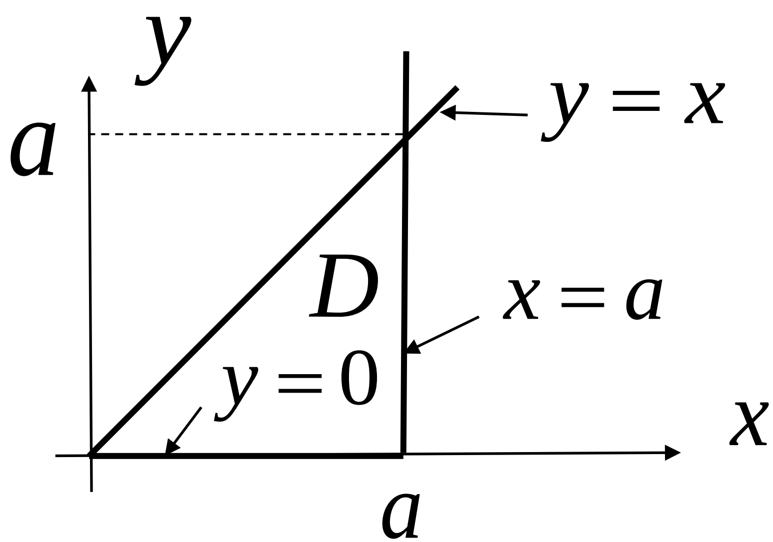
Правые части формул (**) и (***) называются ***повторными*** (или ***двукратными***) интегралами. Процесс расстановки пределов интегрирования называется приведением двойного интеграла к повторному.

Пример 31. Записать двойной интеграл от функции $z(x, y)$ по области D и изменить порядок интегрирования.



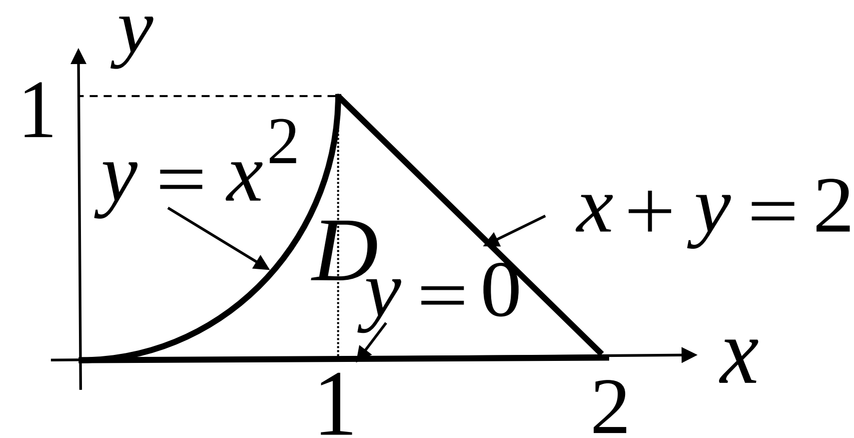
$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d z(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b z(x,y)\,dx.$$

Пример 32. Записать двойной интеграл от функции $z(x,y)$ по области D и изменить порядок интегрирования.



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x z(x,y)\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a z(x,y)\,dx.$$

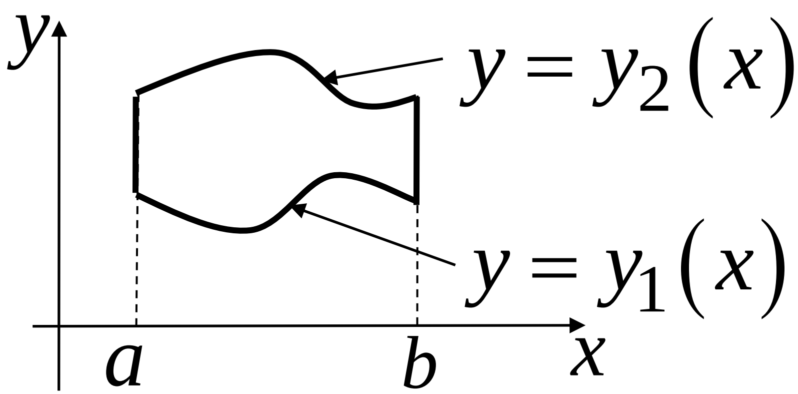
Пример 33. Записать двойной интеграл от функции $z(x,y)$ по области D и изменить порядок интегрирования.



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy =$$

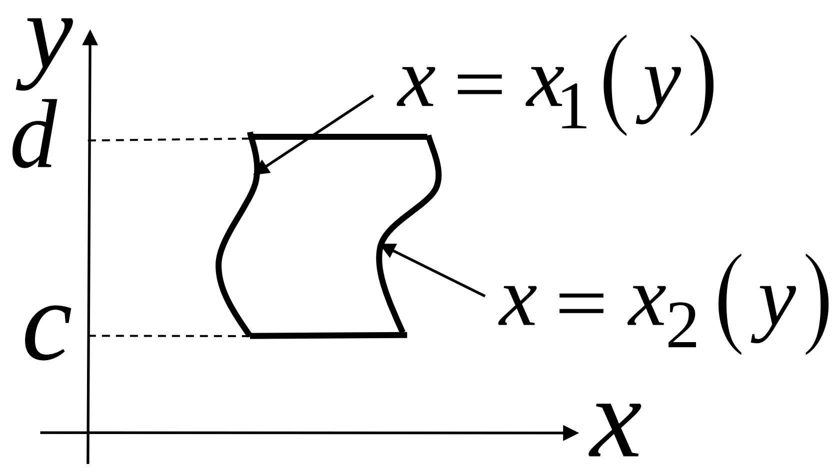
$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} z(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} z(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} z(x,y)\,dx.$$

Пример 34. Записать двойной интеграл от функции $z(x, y)$ по области D .



$$\iint\limits_D z(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\,dy.$$

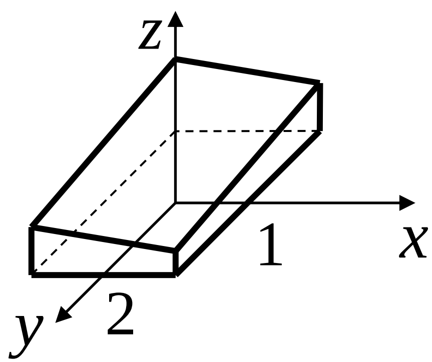
Пример 35. Записать двойной интеграл от функции $z = z(x, y)$ по области D.



$$\iint\limits_D z(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x, y)\,dx.$$

Пример 36. Вычислить двойной интеграл от функции $z(x, y)$ по области D.

$$z = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y, \qquad D: \left(-1 \le x \le 1;\ -2 \le y \le 2\right).$$



$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dy =$$

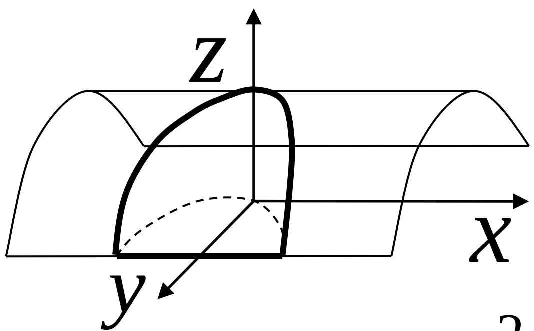
$$= \int_{-1}^{1} dx \left(y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2 \right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

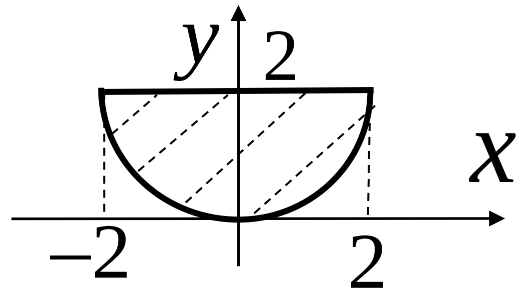
$$= \int_{-1}^{1} \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 8.$$

Пример 37. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 4 - y^2, \ \ z = 0,$$

$$y = 2, \ \ y = \frac{x^2}{2}.$$

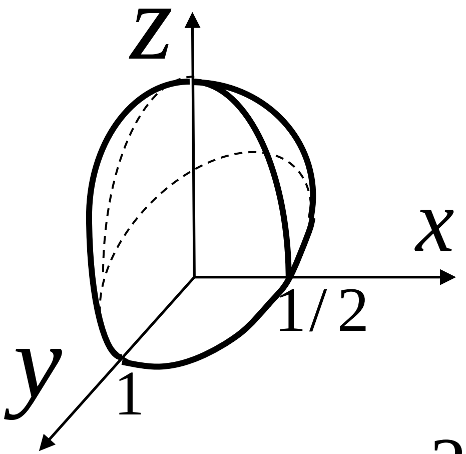


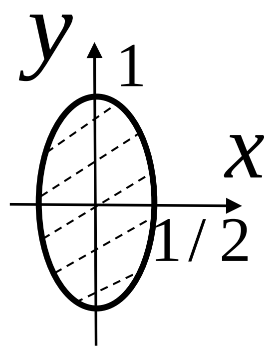


$$V = 2\int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{2} \left(4 - y^2\right) dy = 2\int_0^2 dx \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{2} =$$

$$= 2\int_0^2 \left(8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24}\right) dx = 2\left(\frac{16}{3}x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^7}{168}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{21}.$$

Пример 38. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:





$$z = 1 - 4x^2 - y^2, \;\; z = 0,$$

$$4x^2 + y^2 = 1.$$

$$V = 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} \left(1 - 4x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \left|2x = \sin t\right| =$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{4}.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3498, 3502, 3508, 3509

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задачи 5, 6.
2. Задачи из Бермана. Занятия 3, 4.