Семинар 3

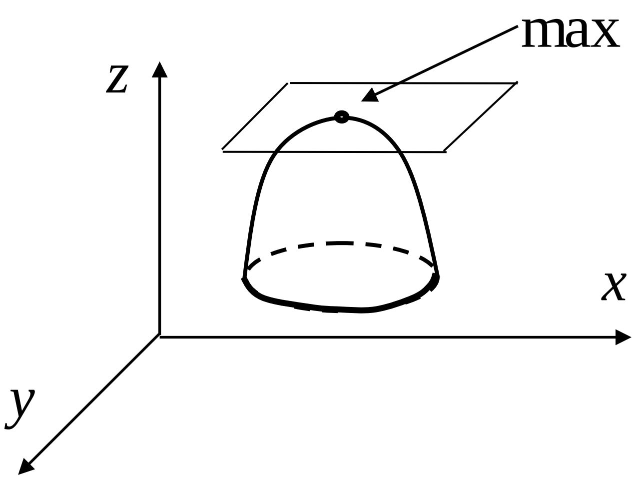
Экстремумы функций

Определение. Функция $z = z(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ **max (min)**, если $\exists \varepsilon > 0: \forall x, y: \ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon; \ y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon \to M(x, y) \in D$ и

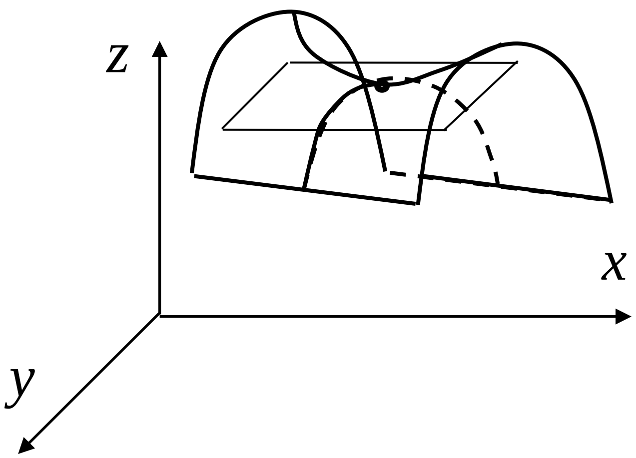
$$z(x_0, y_0) > z(x, y) \qquad \textbf{(max).}$$

$$z(x_0, y_0) < z(x, y) \qquad \textbf{(min).}$$

Геометрический смысл



Но



седловая точка, нет ни **max**, ни **min**.

Точка $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, координаты которой обращают в нуль производные

функции $\boldsymbol{z(x,y)}$ $\quad \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x} = 0,} \qquad \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = 0,}$ называется ***стационарной точкой***.

Необходимое условие достижения дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$ экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ геометрически выражается в том, что касательная плоскость к поверхности в M_0 параллельна плоскости $\mathbf{XOY}$.

Для отыскания стационарной точки функции $z(x, y)$ нужно приравнять $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ и найти действительные корни этой системы уравнений.

Пример 25. Найти стационарные точки функции

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y = 0.$

Из 2-го уравнения $y = 0$ или $x = -1$. Подставим в 1-е уравнение

Ответ. $M_1(0;0)$; $M_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$; $M_3(-1;2)$; $M_4(-1;-2)$.

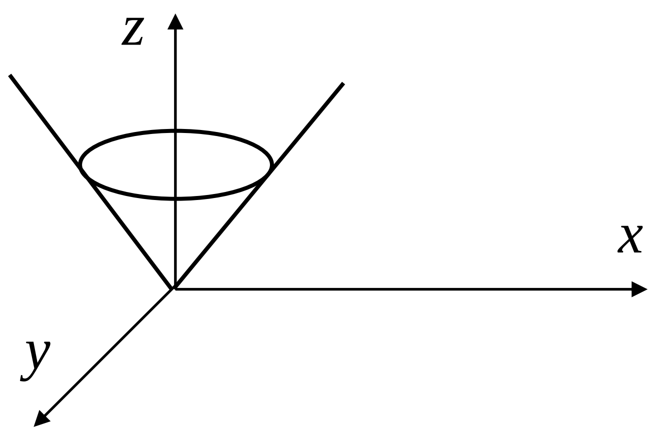
Это стационарные точки.

В каких из них **max и min** рассмотрим дальше.

Заметим, что точками экстремума могут быть точки, в которых (не существуют) $\neg\exists\ \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Пример 26. Найти точки минимума функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. $\boldsymbol{z(0;0)}$- **min**, но (не существуют) $\neg\exists\ \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.



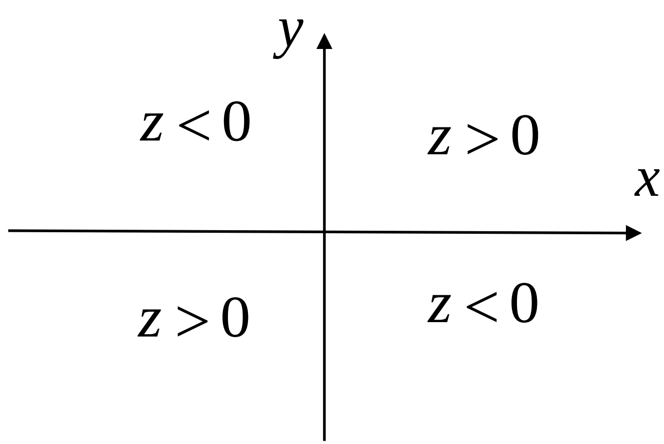
Точками экстремума могут быть точки стационарные и точки, в которых функция не дифференцируема.

Достаточные условия экстремума для функции двух переменных

Необходимый признак экстремума не является достаточным.

Пример 27. Найти точки экстремума функции $\boldsymbol{z = xy}$,

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y = 0, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x = 0,$



$\boldsymbol{M(0;0)}$, но $\begin{aligned} &\boldsymbol{xy > 0 \to z > 0,} \\ &\boldsymbol{xy < 0 \to z < 0.} \end{aligned}$

Ответ. Это седловая точка. Точек экстремума нет.

Пусть функция $z = z(x, y)$ непрерывна со своими частными производными 1-го и 2-го порядка. Точка $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка, т.е.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 0.$$

Вычислим $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}$; $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0}$; $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0}$.

Если $AC - B^2 > 0 \rightarrow$экстремум: **max** при $A < 0$

min при $A > 0$.

Если $AC - B^2 < 0 \rightarrow$ экстремума нет.

Если $AC - B^2 = 0 \rightarrow$ требуется дополнительное исследование.

Пример 28. Найти точки экстремума функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y = 0$.

$M_1(0;0)$; $M_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$; $M_3(-1;2)$; $M_4(-1;-2)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2$

M_1: $A = 10$; $B = 0$; $C = 2$. $AC - B^2 = 20 > 0 \to M_1 - \min$.

M_2: $A = -10$; $B = 0$; $C = -\frac{4}{3}$. $AC - B^2 = \frac{40}{3} > 0 \to M_2 - \max$.

M_3: $A = 2$; $B = 4$; $C = 0$. $AC - B^2 < 0 \to$ нет экстремума.

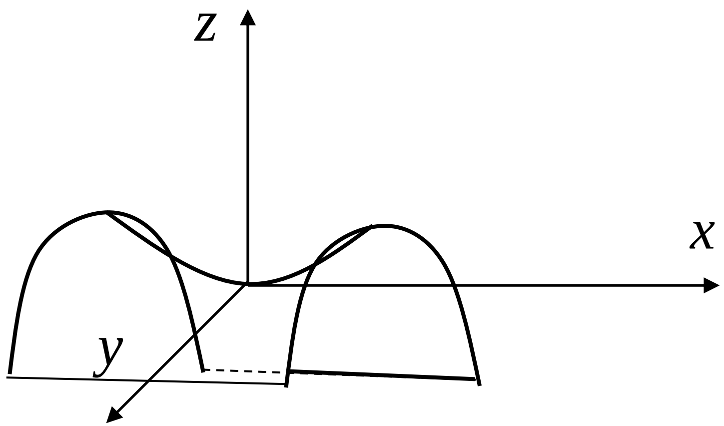
M_4: $A = -2$; $B = -4$; $C = 0$. $AC - B^2 = -16 < 0 \to$ нет экстремума.

Ответ. В точке **(0;0) -** минимум; в точке **(-5/3;0)** – максимум.

Пример 29. Найти экстремумы функции $z = x^2 - y^2$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0$. $M_0(0;0)$, $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$;

$B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$; $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$. $AC - B^2 < 0 \to$ нет экстремума

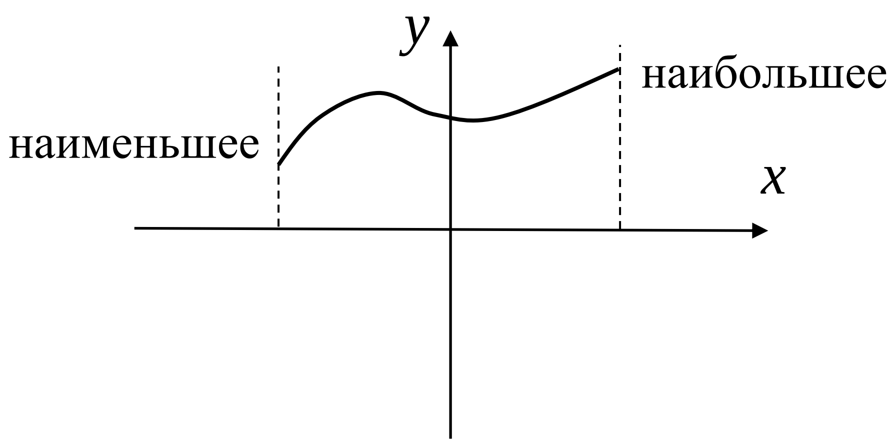


Это гиперболический параболоид.

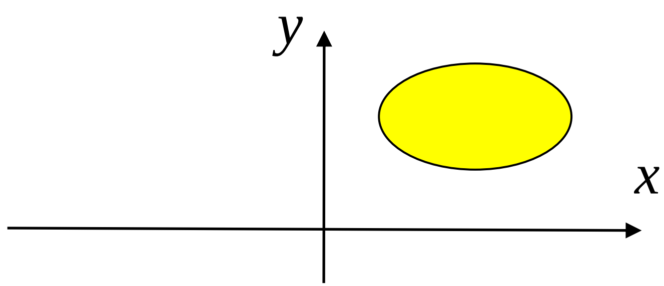
Ответ. Нет экстремумов.

Задачи о наибольших и наименьших значениях

На примере функции одной переменной



Наибольшее и наименьшее значение может достигаться на границах области, где производные могут быть не равны нулю.



Правило

Для нахождения наибольшего и наименьшего в ограниченной замкнутой области значений необходимо:

1) Найти точки, подозрительные на экстремум, ***внутри*** области и вычислить в них значение функции.

2) Найти точки, подозрительные на экстремум, на границе и вычислить в них значения функции.

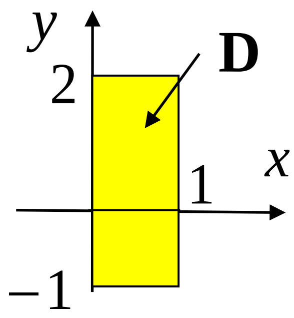
3) Вычислить значения функции в угловых точках (точках склейки границ).

4) Составить таблицу.

5) Наибольшее значение будет наибольшим.

Наименьшее значение будет наименьшим.

Пример 30. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 1 + xy^2$ в области $D: (0 \le x \le 1; -1 \le y \le 2)$.



Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 = 0, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy = 0.$

$y = 0$, x – любое, $z_1(x,0) = 1. \qquad x = 0 \to z = 1, \quad z_2(0,y) = 1.$

$x = 1 \to z = 1 + y^2, \qquad \dfrac{dz}{dy} = 2y = 0, \qquad z_3(1,0) = 1.$

$y = 2 \to z = 1 + 4x, \qquad \dfrac{dz}{dx} = 4. \qquad z_4(0;-1) = 1; \quad z_5(0;2) = 1;$

$y = -1 \to z = 1 + x, \qquad \dfrac{dz}{dx} = 1. \qquad z_6(1;-1) = 2; \quad z_7(1;2) = 5$

Ответ. $z_{наиб}(1;2) = 5, \qquad z_{наим}(x;0) = z_{наим}(0;y) = 1$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3260, 3263, 3273, 3279, 3283

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задача 4
2. Задачи из Бермана. Занятие 2