Семинар 2

Дифференцирование сложных функций двух переменных

Пусть задана $z = z(u,v)$, имеющая непрерывные частные производные

$$z'_u,\ z'_v.$$

Пусть $z = z(u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

Т.е. $z = z[u(x,y),v(x,y)] = z(x,y)$.

Предполагаем, что все частные производные существуют.

Тогда
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}}.$$

Пример 16. Найти частные производные функции двух переменных

$$z = e^{xy}\sin(x+y).$$

Решение. Введем промежуточные переменные

$$xy = u,\ x+y = v \to z = e^{u}\sin v.$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = e^{u}\sin v \cdot y + e^{u}\cos v \cdot 1 =$$

$$= e^{xy}\left(y\sin(x+y) + \cos(x+y)\right).$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = e^{u}\sin v \cdot x + e^{u}\cos v \cdot 1 =$$

$$= e^{xy}\left(x\sin(x+y) + \cos(x+y)\right).$$

Дифференцирование сложных функций многих переменных

Пусть $z = z(u, v, ..., w)$, $u = u(x, y, ..., t), ..., w = w(x, y, ..., t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + ... + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

. . . .

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + ... + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}$$

Если $u = u(x), ..., w = w(x)$, то $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + ... + \dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{dw}{dx}$.

Если $u = x$, то $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + ... + \dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{dw}{dx}$.

Пример 17. Найти частные производные функции

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение. $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6}=-\frac{r^3-3rx^2}{r^6}=-\frac{r^2-3x^2}{r^5}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{r^2-3y^2}{r^5}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

Пример 18. Найти полную и частную производные функции $\boldsymbol{z = x^3 e^{u^2}}$ по переменной $\boldsymbol{x}$.

Решение. $\boldsymbol{u = u(x) \to \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 e^{u^2}}$, $\boldsymbol{\frac{dz}{dx} = 3x^2 e^{u^2} + x^3 e^{u^2}\, 2u \cdot u'_x(x)}$.

Дифференцирование неявных функций

$$F(x,y)=0 \qquad y=y(x).$$

Функция может не существовать.

Пример 19. $x^2+y^2+5=0$. Функция не определена.

Если функция существует, то $\quad F'_x+F'_y\dfrac{dy}{dx}=0, \qquad \dfrac{dy}{dx}=y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}.$

Производная y' не существует при $F'_y=0$.

Пример 20. Найти производную, неявно заданной функции

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0.$$

Решение. $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x, \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y, \qquad$ **Ответ.** $\qquad y'=-\dfrac{x}{y}.$

Пусть $F(x,y,z)=0$, $z=z(x,y)$, x, y – независимые переменные.

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

$$F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

При $F'_z = 0$ формулы теряют смысл.

Пример 21. Найти частные производные функции двух переменных $z=z(x,y)$, заданной неявно $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Решение. $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z$.

Ответ. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$.

Пример 22. Найти частные производные функции двух переменных $\boldsymbol{z=z(x,y)}$, заданной неявно $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^{z}=0$.

Решение. $F'_x=-ye^{-xy}$; $F'_y=-xe^{-xy}$; $F'_z=-2+e^{z}$;

Ответ. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}$.

В случае $\boldsymbol{n}$ – переменных $u=u(x,y,z,...)$

$$F(x,y,z,...,u)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_u};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_u};\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{F'_z}{F'_u};\qquad \ldots .$$

Касательная плоскость к поверхности

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной явно $z = z(x, y)$.

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$.

$$F'_x\big|_{M_0}(x - x_0) + F'_y\big|_{M_0}(y - y_0) + F'_z\big|_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

Нормаль к поверхности

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$$

- уравнение линии нормали

$$\bar{n}=\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0};\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0};\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}\right)$$

- нормальный вектор.

В случае $z=z(x,y)$ уравнение нормали

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример 23. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ в точке } M_0(x_0, y_0, z_0).$$

Решение.

$$\left(F'_x\right)_{M_0} = 2x_0 \qquad \left(F'_y\right)_{M_0} = 2y_0 \qquad \left(F'_z\right)_{M_0} = 2z_0$$

Ответ. Уравнение касательной плоскости

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$$

(на двойку сократили)

или $$x_0x + y_0y + z_0z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2.$$

Уравнение нормали $$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0}.$$

Пример 24. Записать уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ параллельной плоскости $x+y-z=0$.

Решение.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}=2x_0 \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=y_0 \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=2z_0$$

Уравнение касательной плоскости

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0. \qquad M_0(x_0,y_0,z_0)=?$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{2z_0}{-1} \\ x_0^2+\dfrac{y_0^2}{2}+z_0^2=1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x_0=\dfrac{y_0}{2} \\ z_0=-\dfrac{y_0}{2} \end{matrix}, \quad \frac{y_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{4}=1, \quad y_0=\pm1, \quad x_0=\pm\frac{1}{2}, \quad z_0=\mp\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\left(x \pm \frac{1}{2}\right) + (y \pm 1) - \left(z \mp \frac{1}{2}\right) = 0$, $x + y - z \pm 2 = 0$.

Производная функции по направлению

Производная функции ***u=u(x, y, z)*** ***по направлению*** $\vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$,

где направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора $\vec{l}$:

равна $$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

или $$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l} = |\operatorname{grad} u| \cos\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right).$$

Градиент функции трех переменных $u=u(x, y, z)$ – вектор в направлении которого функция наиболее быстро изменяется:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

Свойства градиента

$$\operatorname{grad} c = \vec{0}, \quad c - \text{const}, \qquad \operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u, \quad c - \text{const},$$

$$\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v, \quad \operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v,$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2},$$

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u, \qquad \operatorname{grad}|\vec{r}| = \vec{r} \,/\, |\vec{r}|.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = |\operatorname{grad} u|,$$

т.е. в данном случае $\vec{l}$ имеет направление

$$\operatorname{grad} u.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3041, 3046, 3102, 3127, 3129, 3145

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных». Задачи 2, 3
2. Задачи из Бермана. Занятие 1