Семестр 2

Семинар 1

Модуль 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных

Функция двух переменных

Определение. z называется ***функцией двух переменных*** величин x и y на множестве D, если каждой точке этого множества соответствует одно определенное значение $z = z(x, y)$.

Множество точек D называется ***областью определения функции***.

Задание функции – таблица, аналитическое, графиком.

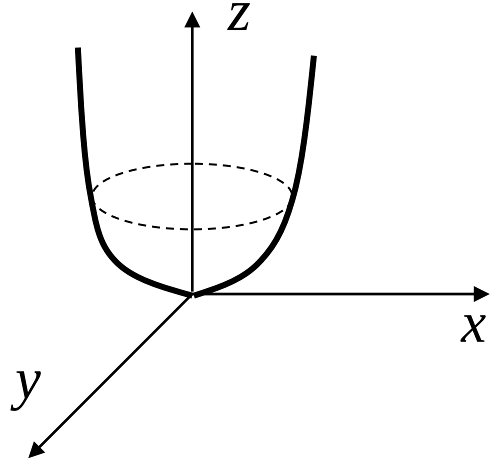
Пример 1. Функция $z=z\ (\alpha,\mu)$ задана таблично

$\mu \backslash \alpha$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$
0,01	0,897	0,945	0,961
0,02	0,812	0,845	0,925

Пример 2. Функция задана аналитически $z = 2x + 3y$;

Пример 3. Функция задана аналитически $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Пример 4. Функция задана аналитически и графически $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$.



Область определения функции двух переменных

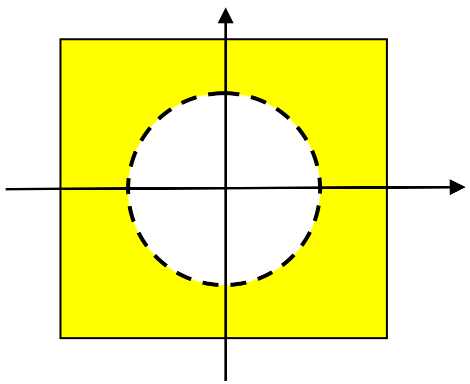
Область определения – множество значений ***x*** и ***y*** для которых формула имеет смысл.

Пример 5. Найти область определения функции

$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}\Rightarrow x^2+y^2\le r^2$ - круг.

Пример 6. Найти область определения функции и отобразить ее на плоскости

$z=\ln(x^2+y^2-r^2)\Rightarrow x^2+y^2>r^2$ - внешность круга.



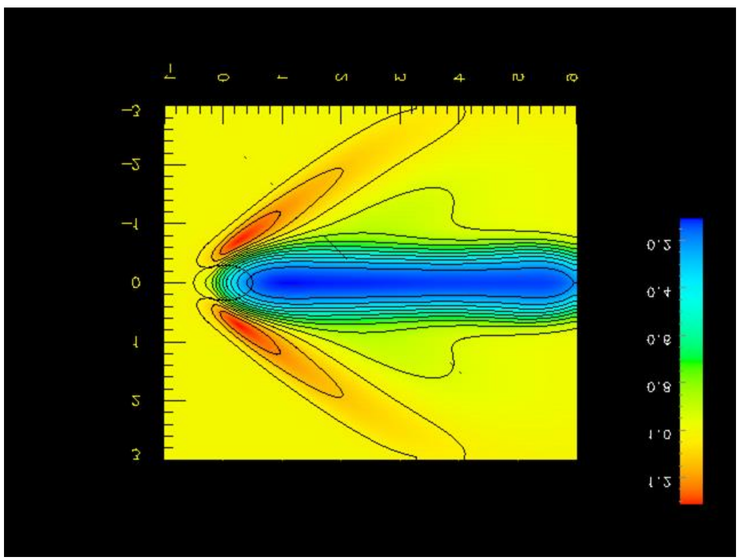
Пример 7. Найти область определения функции $z = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2} \Rightarrow \forall x, y$.

Пример 8. Найти область определения функции $z = \dfrac{\sin(xy)}{x - y} \Rightarrow x \neq y$.

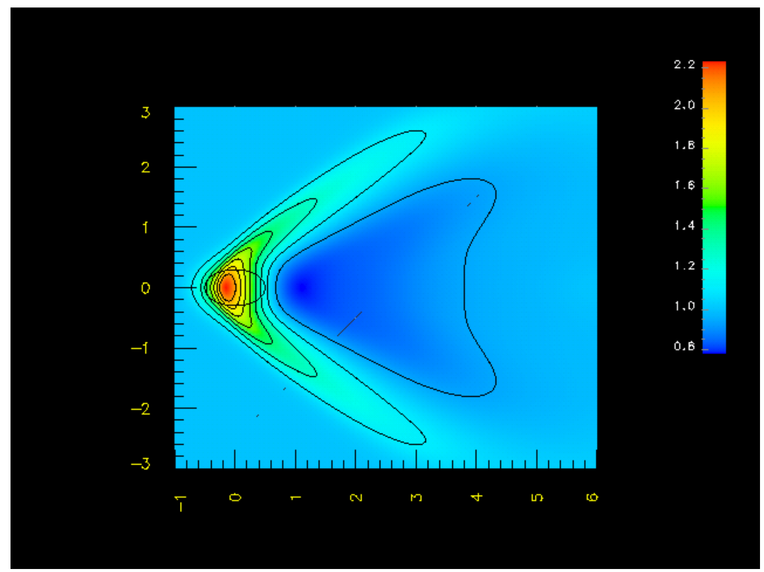
Линии уровня функции двух переменных

$$u = u(x, y) = C, \quad (C = \mathrm{const}).$$

Изохоры (линии постоянной плотности)



Изобары (линии постоянного] давления)



Частные производные

Определение. ***Частной производной*** по переменной x от функции двух переменных $z = z(x, y)$ называется функция переменных x и y, получающаяся при дифференцировании $z(x, y)$ по x в предположении, что $y = \text{const}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[z(x, y)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл частной производной дан в лекциях.

Пример 9. Найти частную производную функции двух переменных $z = x^2 y$ по переменной x.

Ответ. $z'_x = 2xy$.

Пример 10. Найти частную производную функции двух переменных $z = xy$ по переменной x.

Ответ. $z'_x = y$.

Пример 11. Найти частную производную функции двух переменных $z = 2x + y^2$ по переменной x.

Ответ. $z'_x = 2$.

Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции двух переменных по переменной y.

Пример 12. Найти частные производные функции двух переменных $z = 3axy - x^3 - y^3$ по переменным x и y.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3ay - 3x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3ax - 3y^2$.

Пример 13. Найти частные производные функции двух переменных $z = x^y$ по переменным x и y.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

Значения частных производных функции двух переменных при определенных значениях $x = x_0$, $y = y_0$ обозначают

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad \text{или } z'_x(x_0, y_0);\ z'_y(x_0, y_0).$$

Пример 14. Найти частные производные функции двух переменных $z = 3axy - x^3 - y^3$ при значениях $x=a$, $y=0$.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\ y=0}} = -3a^2; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\ y=0}} = 3a^2.$$

Аналогично определяются частные производные функции n переменных

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = u'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{\Delta x_1}.$$

Пример 15. Найти частные производные функции трех переменных $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ по переменным x, y, z.

$$r'_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \cos\alpha.$$

$$r'_y = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \cos\beta.$$

$$r'_z = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\gamma.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 2983, 2984, 2996

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных» задача 1