ЛЕКЦИЯ 9

12.5.2. Ориентированные кривые. Кривая называется **ориентированной**, если при движении вдоль нее важен порядок следования точек. Выбранное направление движения называют **положительным** (L^+); противоположное направление называют **отрицательным** (L^-).

Для простого контура (замкнутой кривой без самопересечений) в плоскости **положительным считают направление обхода, при котором ограниченная контуром область остается слева**.

12.6. Криволинейный интеграл II рода (по координатам).

12.6.1. Работа переменной силы, действующей на материальную точку при ее движении вдоль кривой.

$L = AB$ – гладкая кривая, движение от A к B.

Вычисляем работу одной из действующих сил: $\bar{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{P}(x,y,z);\ \boldsymbol{Q}(x,y,z);\ \boldsymbol{R}(x,y,z)\}$.

Если $\bar{F}$ = const,

$$\mathcal{A} = \bar{F}\cdot\bar{s},$$

скалярное произведение, $\bar{s}$ – вектор пройденного пути.

При переменной силе и криволинейном пути **разобьем кривую** L на малые части L_i:

$\forall i$ считаем L_i отрезком прямой, а силу постоянной.

И будем применять ту же формулу.

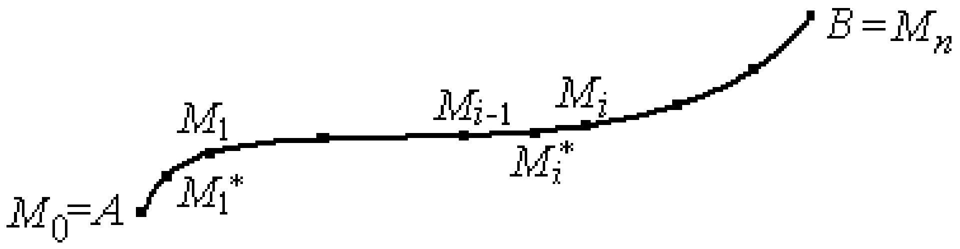
$$\mathcal{A}_i \approx \bar{F}(M_i^*)\cdot\Delta\bar{s}_i = P(M_i^*)\Delta x_i + Q(M_i^*)\Delta y_i + R(M_i^*)\Delta z_i.$$

$M_i^* \in L_i$.

12.6.2. Определение и условия существования криволинейного интеграла II рода.

$f(x, y, z)$ определена в точках <u>ориентированной</u> кривой
$L = AB$.

Разобьем L точками $M_0 = A,\ M_1,\ \ldots,\ M_n = B$ на малые части $L_i = M_{i-1} M_i$.



$\forall i$ выберем точку $M_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \in L_i$.

Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \Delta x_i,$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – разница значений координаты x для M_{i-1} и M_i.

Криволинейным интегралом II рода по координате *x* от функции *f*(*x*, *y*, *z*) по кривой *L* называется число

$$\int\limits_L f(x,y,z)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta x_i,$$

где δ – максимальная длина частей L_i, если этот предел $\exists$, не зависит от способа разбиения кривой и от выбора точек M_i^*.

Аналогично определяются

$$\int\limits_L f(x,y,z)dy = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta y_i, \qquad \int\limits_L f(x,y,z)dz = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i$$

и сумма

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_L P(x,y,z)dx + \int\limits_L Q(x,y,z)dy + \int\limits_L R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_L \bar{a}d\bar{r},$$

под интегралом – скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{P;\ Q;\ R\}$, $d\bar{r} = \{dx, dy, dz\}$.
Вектор $d\bar{r}$ направлен по касательной к кривой L в направлении движения.

Замечание. $|d\bar{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=dl$

Поэтому и так обозначают:

$$d\bar{r}=\{dx,dy,dz\}=d\bar{l}\,, \qquad |d\bar{r}|=|d\bar{l}|=dl.$$

$$\int\limits_L \bar{a}d\bar{l}=\int\limits_L \bar{a}d\bar{r}=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz.$$

Условия существования криволинейного интеграла II рода. Достаточно **гладкости кривой** и **непрерывности интегрируемых функций**.

Можно обобщить на кусочно-гладкие кривые и на функции, имеющие конечное число разрывов 1 рода.

12.6.6. Связь криволинейных интегралов I и II рода.

$$d\bar{r} = \{dx, dy, dz\}, \qquad |d\bar{r}| = dl$$

$\Rightarrow \qquad dx = dl \cdot \cos\alpha, \quad dy = dl \cdot \cos\beta, \quad dz = dl \cdot \cos\gamma,$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы касательной к кривой в данной точке, направленной в сторону движения.

$$\int\limits_L P dx + Q dy + R dz = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dl.$$

12.6.3. Свойства криволинейного интеграла II рода

$$\int\limits_L f(x,y,z)dx.$$

1. $f(x,y,z)=0 \Rightarrow \int\limits_L 0\,dx = 0;$ $\qquad f(x,y,z)=1 \Rightarrow \int\limits_L dx = x(B)-x(A).$

2. Линейность.

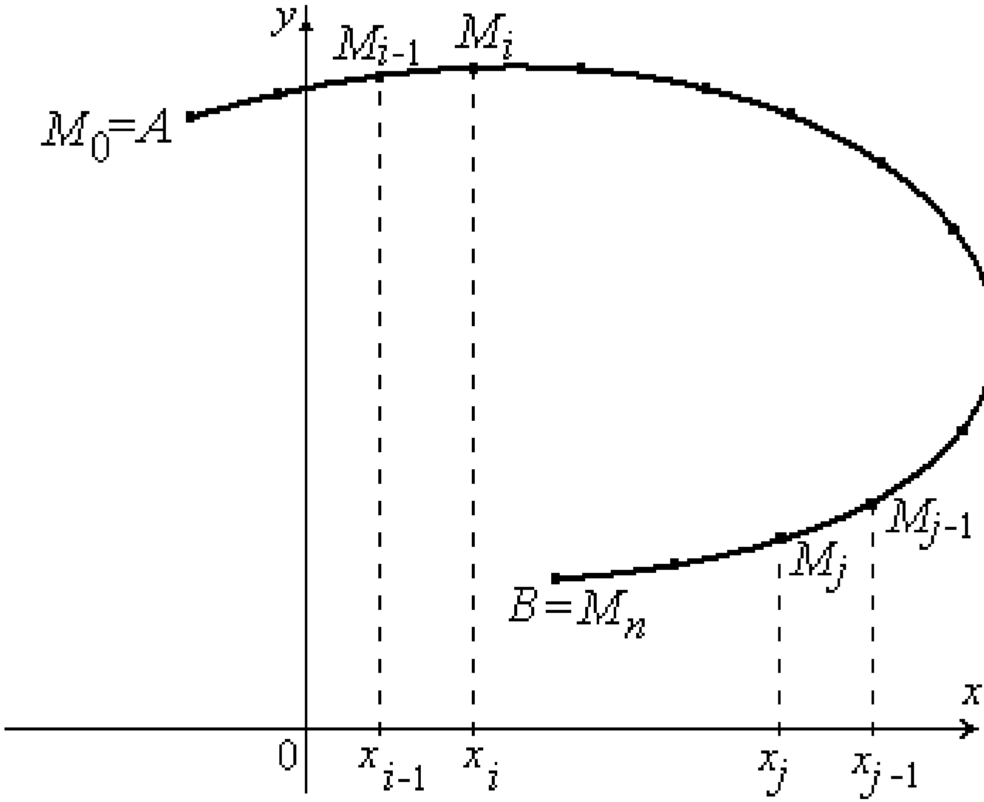
.

3. Аддитивность.

4. Интеграл «не замечает» изменения функции в конечном числе точек.

5. Криволинейный интеграл II рода **зависит от направления движения по кривой:**

$$\int\limits_{L^-} f(x,y,z)dx = -\int\limits_{L} f(x,y,z)dx.$$



$\Delta x_i > 0$

$\Delta x_j < 0$

Свойство следует из того, что при нумерации точек M_i с другого конца поменяют знак все разности

$\Delta x_i = x_i - x_{i\text{-}1}$.

6. Если кривая L перпендикулярна оси Ox, то

$$\int_L f(x,y,z)dx = 0.$$

Замечание. Свойства, связанные с оценкой интеграла с помощью неравенств, для криволинейного интеграла II рода в общем случае не верны. Причина в том, что в интегральной сумме значения функции умножаются на величины $\Delta x_i = x_i - x_{i\text{-}1}$, которые могут иметь разные знаки.

Не верна также в общем случае и теорема о среднем значении.

12.6.4. Применения криволинейного интеграла II рода.

Работа переменной силы $\bar{F} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, действующей на материальную точку при ее движении вдоль кривой L в заданном направлении:

$$\mathcal{A} = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_L \bar{F}d\bar{r}.$$

<u>Работа силы равна сумме работ ее составляющих.</u>

$$\mathcal{A} = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl,$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы касательной к кривой в данной точке, направленной в сторону движения.

12.6.5. Вычисление криволинейного интеграла II рода.

Несколько случаев параметризации кривой.

1. $L: \quad y = y(x), \quad x \in [a, b].$

$\Rightarrow$ с учетом направления движения по кривой,

$$\int_L f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y(x))dx \quad \text{или} \quad \int_L f(x,y)dx = \int_b^a f(x,y(x))dx.$$

2. $L: \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0.$

$$\int_L f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))x'(t)dt \quad \text{или} \quad \int_L f(x,y)dx = \int_\beta^\alpha f(x(t),y(t))x'(t)dt.$$

(в соответствии с направлением движения).

3. $\quad \boldsymbol{L:} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = x(t),} \\ \boldsymbol{y = y(t),} \\ \boldsymbol{z = z(t),} \end{cases} \quad \boldsymbol{t \in [\alpha,\ \beta],} \qquad x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0.$

С учетом направления движения по кривой

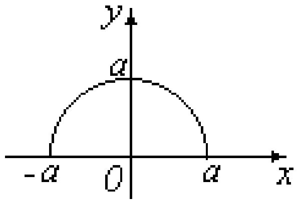
$$\int\limits_L f(x,y,z)dx = \pm\int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt.$$

**<u>Вывод:</u> с помощью уравнений, задающих кривую *L*,
интеграл сводится к интегралу Римана по отрезку от функции одной переменной.**

Пример. Вычислить

$$I = \int_L (x^2 + 2xy)dy + xydx,$$

L – полуокружность



,

проходимая в направлении от точки (a, 0) до точки (– a, 0).

Решим задачу дважды, применяя различные способы параметризации кривой.

1) $L:\ \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0,\ \pi].$

$$I = \int_0^{\pi} (a^2\cos^2 t + 2a^2\cos t\sin t)a\cos t dt + \int_0^{\pi} a^2\cos t\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= a^3\left(\int_0^{\pi}\cos^3 tdt + 2\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin tdt - \int_0^{\pi}\cos t\sin^2 tdt\right) =$$

$$= a^3\left(\int_0^{\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t - 2\int_0^{\pi}\cos^2 t\, d\cos t - \int_0^{\pi}\sin^2 t d\sin t\right) =$$

$$= a^3\left(\sin t - 2\frac{\sin^3 t}{3} - 2\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{3}a^3.$$

$$I = \int_L (x^2 + 2xy)dy + xydx,$$

2) $L:\quad y = \sqrt{a^2 - x^2},\qquad x \in [-a, a].$

$$I = \int_a^{-a}(x^2 + 2x\sqrt{a^2 - x^2})\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + \int_a^{-a} x\sqrt{a^2 - x^2}dx =$$

$$= 0 - 2\int_a^{-a} x^2 dx + 0 = 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}a^3.$$

(интеграл от нечетной функции по отрезку вида [–a, a], равен нулю).