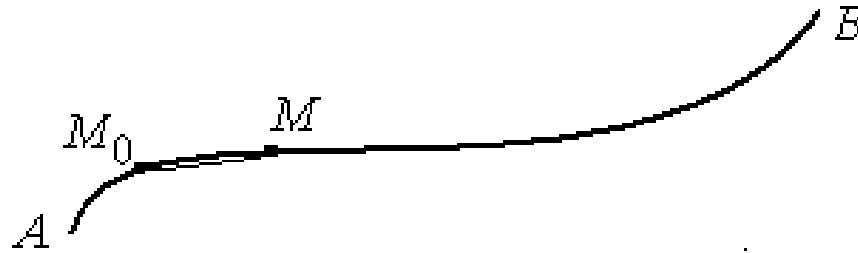


ЛЕКЦИЯ 8

12.5. Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги).

12.5.1. Дифференциал длины дуги гладкой кривой. Длина кривой.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0.$$



$$M_0 \leftrightarrow t_0, \quad M \leftrightarrow t, \quad t > t_0.$$

$l(M)$ – **длина дуги** от т. A до т. M – функция от t .

Малый кусочек $M_0 M$ приближенно считаем прямолинейным.

$$\Delta l(M_0) \approx \sqrt{(\Delta x(t_0))^2 + (\Delta y(t_0))^2}.$$

Заменим приращения координат дифференциалами:

$$\Delta l(M_0) \approx \sqrt{(x'(t_0)\Delta t)^2 + (y'(t_0)\Delta t)^2} = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} \cdot \Delta t.$$

Получили линейную функцию от Δt , приближающую приращение $\Rightarrow$ это дифференциал длины кривой:

$$dl(M) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt ,$$

Или:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

– форма, инвариантная относительно функциональных подстановок:

$\Rightarrow$ Длина кривой:

$$l(L) = \int_0^{l(L)} dl$$

Два частных случая.

1. L : $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, т. е. $t = x$:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (y'_x dx)^2}$$

$\Rightarrow$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2_x} dx,$$

$$l(L) = \int_0^{l(L)} dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2_x} dx.$$

$$2. L: \quad \rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

$$\begin{aligned} \sqrt{dx^2 + dy^2} &= \sqrt{(x'_\varphi d\varphi)^2 + (y'_\varphi d\varphi)^2} = \\ &= \sqrt{(\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)^2} d\varphi \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi} d\varphi,$$

$$l(L) = \int_0^{l(L)} dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi} d\varphi.$$

Для гладкой кривой в трехмерном пространстве.

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2 \neq 0:$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt,$$

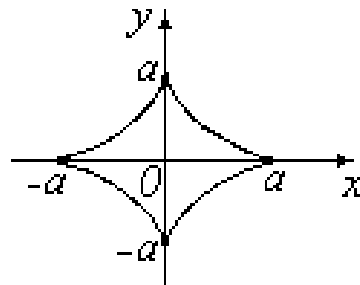
$$l(L) = \int_0^{l(L)} dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt.$$

Замечание. Длину кусочно-гладкой кривой естественно определить как сумму длин составляющих ее гладких кусков.

Пример.

1. Вычислить длину астроида

$$L: \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$



$$\begin{aligned} l(L) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d \sin t = 12a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 6a. \end{aligned}$$

12.5.4. Определение и условия существования криволинейного интеграла I рода.

Пусть $f(x, y, z)$ определена в точках кривой $L = AB$.

Разобьем кривую L точками

$$M_0 = A, \quad M_1, \quad \dots, \quad M_n = B$$

на n малых частей $L_i = M_{i-1} M_i$, длиной Δl_i

$\forall i$ выберем $M_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \in L_i$.

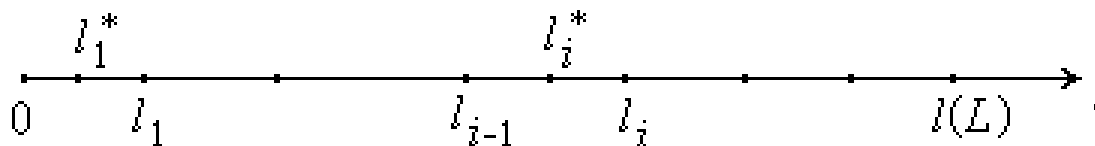
Определение. Криволинейным интегралом I рода от $f(x, y, z)$ по L называется число

$$\int_L f(x, y, z) dl = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta l_i,$$

где $\delta = \max \Delta l_i$, если этот предел $\exists$ и не зависит от способа разбиения кривой и от выбора точек M_i^* .

Замечание. Рассмотрим ось переменной l .

Одновременно с разбиением кривой получим разбиение отрезка $[0; l(L)]$:



Видим, что по переменной l это обычный интеграл Римана.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x(l_i^*), y(l_i^*), z(l_i^*)) \Delta l_i,$$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_0^{l(L)} f(x(l), y(l), z(l)) dl$$

Условия существования криволинейного интеграла I рода: достаточно требовать **гладкость кривой** (тогда $\exists$ длина дуги) и **непрерывность интегрируемой функции**.

Замечание 1. Можно определить интеграл I рода

- по замкнутой кривой, разбивая ее на незамкнутые,
- по кусочно-гладкой кривой как сумму интегралов по ее гладким кускам,
- от ограниченной функции с конечным числом разрывов I рода, разбивая кривую на части по точкам разрыва.

Замечание 2. Переменную интегрирования (длину дуги кривой) в литературе обозначают иногда буквой s . Мы же букву s будем использовать для обозначения площадей.

12.5.5. Свойства криволинейного интеграла I рода определяются тем, что это обычный интеграл Римана по длине дуги.

$$1. f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \int_L 0 dl = 0; \quad f(x, y, z) = 1 \Rightarrow \int_L dl = l(L).$$

2. Линейность.

3. Аддитивность.

4. Интеграл «не замечает» изменения функции в конечном числе точек

5. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления движения по кривой.

6. Свойства, связанные с оценкой интеграла с помощью неравенств – обычные.
Например:

$$m \leq f(x, y, z) \leq M \Rightarrow m \cdot l(L) \leq \int_L f(x, y, z) dl \leq M \cdot l(L).$$

$$|f(x, y, z)| \leq M \Rightarrow \left| \int_L f(x, y, z) dl \right| \leq M \cdot l(L).$$

12.5.6. Теорема о среднем значении для криволинейного интеграла I рода.
Определение.

$$f_{\text{cp}} = \frac{\int f(x, y, z) dl}{l(L)}$$

Теорема. Если $f(x, y, z)$ непрерывна на кривой L , то

$$\exists M_0(x_0, y_0, z_0) \in L: \quad f(M_0) = \frac{\int f(x, y, z) dl}{l(L)},$$

или

$$\int_L f(x, y, z) dl = f(x_0, y_0, z_0) \cdot l(L).$$

12.5.7. Некоторые применения криволинейного интеграла I рода.

1. $l(L) = \int_L dl$ – длина кривой L .

2. $\rho(x, y, z)$ – линейная плотность $\Rightarrow$

$$m(L) = \int_L \rho(x, y, z) dl \text{ – масса кривой } L.$$

3. Координаты центра масс кривой:

$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{\int_L x \cdot \rho(x, y, z) dl}{m(L)}, \quad \text{и др.}$$

Если $\rho = \text{const}$,

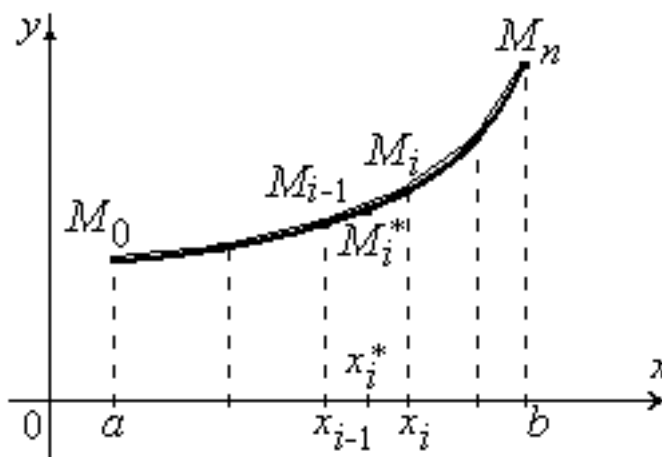
$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{\int_L x dl}{l(L)}, \quad \text{и др. (средние значения координат).}$$

4. Площадь поверхности тела, образованного вращением кривой вокруг оси.

Гладкая кривая $L: y = f(x)$, $x \in [a, b]$, вращается вокруг оси Ox .

$$s_{Ox} = 2\pi \int_L f(x) dl = 2\pi \int_L y(x) dl$$

Вывод формулы.



При малых Δl_i заменим дугу $M_{i-1} M_i$ прямолинейным отрезком, а соответствующую этой дуге часть поверхности вращения – усеченным конусом, боковая поверхность которого равна

$$2\pi \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta l_i = 2\pi \cdot f(x_i^*) \cdot \Delta l_i,$$

где $x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ – середина отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Составим сумму

$$s_{Ox} \approx \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot f(x_i^*) \cdot \Delta l_i.$$

Сравним с определением криволинейного интеграла

$$\int_L f(x, y, z) dl = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta l_i$$

$\Rightarrow$ это интегральная сумма для

$$2\pi \int_L f(x) dl.$$

При предельном переходе ошибка приближения исчезает.

12.5.8. Вычисление криволинейного интеграла I рода.

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_0^{l(L)} f(x(l), y(l), z(l)) dl,$$

можно **делать замену переменной на более удобную**.

Все под интегралом выразить через новую переменную.

Поставить пределы ее изменения.

Частные случаи.

$$1. L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_0^{l(L)} f(x(l), y(l), z(l)) dl,$$

2. $L: \quad y = y(x), \quad x \in [a, b],$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

3. $L: \quad \rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta], \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$

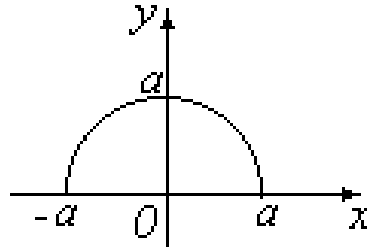
$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2} d\varphi.$$

4. L :

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Пример. Вычислить $\int_L y dl$, где L - верхняя полуокружность



Решим задачу при трех различных способах параметризации кривой.

$$1). \quad L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

$$\int_L y dl = \int_0^{\pi} a \sin t \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = a^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = a^2 (-\cos t) \Big|_0^{\pi} = 2a^2.$$

$$2). \quad L: \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

$$\int_L y dl = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2} dx =$$

$$= \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= \int_{-a}^a a dx = a \cdot 2a = 2a^2.$$

$$3). \quad L: \quad \rho = a, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2} d\varphi.$$

$$\int_L y dl = \int_0^{\pi} a \sin \varphi \sqrt{a^2 + 0} d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = a^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} = 2a^2.$$