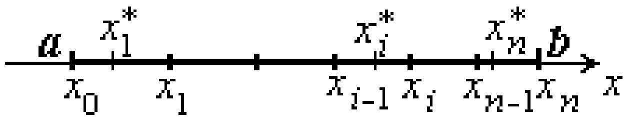
ЛЕКЦИЯ 2

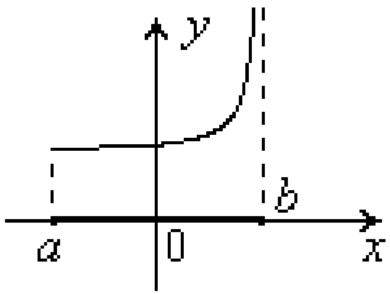
9. Несобственные интегралы (обобщение интеграла Римана).

Снова вспомним определение интеграла Римана по отрезку:



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i ,$$

δ – максимальная длина отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, i=1, 2, …, n, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения отрезка и от выбора точек x_i*.
Класс интегрируемых функций: непрерывные, с конечным числом разрывов 1 рода, монотонные ограниченные. Ограниченность – общее свойство всех этих функций, неограниченные функции по Риману не интегрируются.

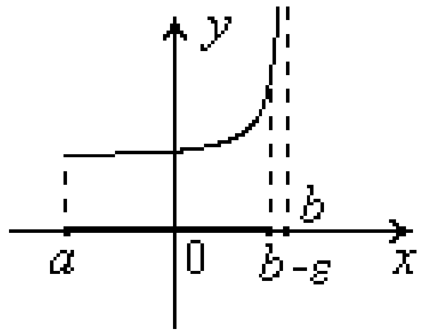


Выбор точки x_n^* неограниченно меняет интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i + f(x_n^*)\Delta x_n$$

9.2. Несобственные интегралы II рода (от неограниченной функции). Пример.

9.2.1. Понятие несобственного интеграла II рода.

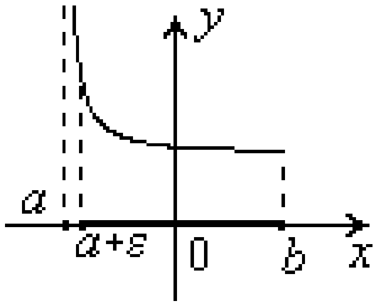


Определение. Пусть $f(x)$ определена на $[a,$ b), интегрируема на каждом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, и не ограничена при $x \to b$ слева.

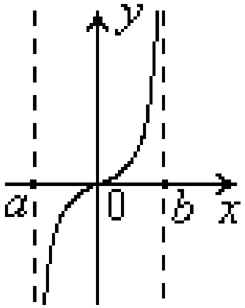
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел конечен, интеграл называют **сходящимся**, если бесконечен или не существует – **расходящимся**.

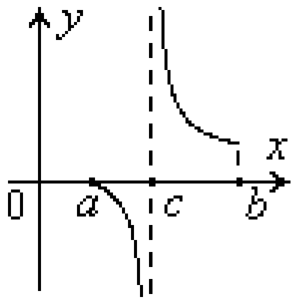
Аналогично:



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$



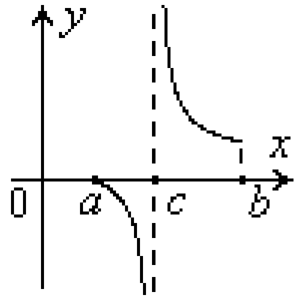
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx$$



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

9.2.2. Главное значение в смысле Коши несобственного интеграла II рода.



$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

9.2.3. Свойства несобственного интеграла II рода.

Свойства аналогичны свойствам интеграла I рода, т.е. аналогичны свойствам интеграла Римана.

Отметим, что **сумма сходящихся интегралов сходится; сумма расходящихся интегралов может сходиться.**

Примеры.

1. Пусть $\boldsymbol{b>0,\ p\neq 1}$.

$$\int_0^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\varepsilon^b = \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1}.$$

Предел конечен при условии $-p+1>0$, т. е. $p<1$,
и бесконечен при $-p+1>0$.

Случай $p=1$:

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x|\Big|_\varepsilon^b = \ln b - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = \infty.$$

Вывод:

$\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ **сходится при $p<1$ и расходится при $p\geq 1$.** **(**)**

2. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ **сходится при** $p<1$ **и расходится при** $p\geq 1$**.**

(***)

3. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x-3}$.

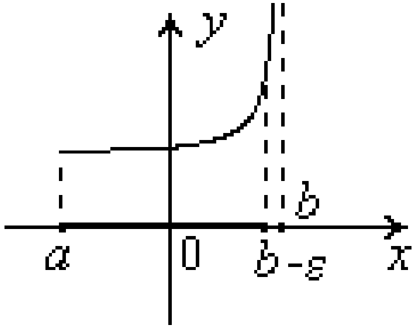
Подынтегральная функция разрывна в точке $x = 3$, поэтому для применения обобщения формулы Ньютона-Лейбница разобьем отрезок на два (точка разрыва может быть крайней, но не должна быть внутренней для отрезка).

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{x-3} = \int\limits_1^3 \frac{dx}{x-3} + \int\limits_3^4 \frac{dx}{x-3} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \ln|x-3| \Big\|_1^{3-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \ln|x-3| \Big\|_{3+\varepsilon_2}^4 .$$

Интеграл расходится.

9.2.4. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница.

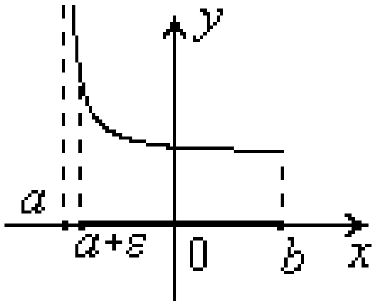
Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$ и не ограничена при $x \to b - 0$.



$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a)$$

Здесь $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x).$

Аналогично для функции, непрерывной на $(a, b]$ и не ограниченной при $x \to a+0$



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a+0)$$

$$F(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x).$$

Замечание. Если $F(x)$ непрерывна, то получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Можно всегда так и писать, имея в виду, что под $F(b)$ или $F(a)$ понимается $F(b-0)$ или $F(a+0)$**.**

ВАЖНО: МЫ ОБОБЩИЛИ ФОРМУЛУ НЬЮТОНА_ЛЕЙБНИЦА НА СЛУЧАЙ, КОГДА ОСОБЫЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ТОЧКИ ЯВЛЯЮТСЯ КРАЙНИМИ ТОЧКАМИ ОТРЕЗКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ!!!

Пример.

1. $\int_1^4 \frac{dx}{x-3} =$

$$= \int_1^3 \frac{dx}{x-3} + \int_3^4 \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3|\Big|_1^3 + \ln|x-3|\Big|_3^4 = (\ln 0 - \ln 2) + ...$$

Первый интеграл расходится, следовательно расходится и исходный интеграл.

Замечание. Можно применять методы замены переменной и интегрирования по частям.

Интегрирование по частям: если $F(x)$ непрерывна на $[a, b)$:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

(если $\exists$ оба слагаемых в правой части; иначе надо применять формулу так:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left((u(x)v(x))\Big|_a^{b-\varepsilon} - \int_a^{b-\varepsilon} v(x)du(x) \right))$$

Замена переменной может перевести сходящийся несобственный интеграл в обычный интеграл по отрезку и наоборот.

Пример.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x = \cos t,\ dx = -\sin t dt, \\ x = -1 \Rightarrow t = \pi,\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = -\int_{\pi}^{0} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\sin t dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt$$

9.3. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx$ **имеет единственную особенность в точке** b ($f(x)$ не ограничена при $x \to b$, $x < b$ или $b=\infty$).

Теорема 1. Признак сравнения. Пусть $f(x) \geq 0$.

а) Если $\forall x \in [a; b)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится,

то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$;

б) если $\forall x \in$ $0 \leq g(x) \leq f(x)$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится,

то расходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема 2. Признак эквивалентности (второй признак сравнения или признак сравнения в предельной форме). Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную особенность в точке b.

Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b$ $(x < b)$, то интегралы

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно (оба сходятся или оба расходятся)

Замечание 1. При исследовании несобственных интегралов на сходимость чаще всего их сравнивают с интегралами вида

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \text{ (интеграл сходится при } p>1);$$

$$\int_0^b \frac{dx}{x^p}, \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} \text{ (интегралы сходятся при } p<1).$$

Замечание 2. Могут рассматриваться интегралы, являющиеся одновременно несобственными и I и II рода, такие интегралы должны рассматриваться как сумма интегралов по промежуткам, внутри которых функция не имеет особенностей.

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}dx$. Сколько особенностей у этого интеграла, в каких точках?

Интеграл имеет особенности в точках $x = 0$, $x = 1$ и на бесконечности.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}dx.$$

При $x\to\infty$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{x^2} > 0,\quad p = 2$. На бесконечности интеграл сходится.

При $x\to+0$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}} \sim -\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0,\quad p = \dfrac{1}{2}$. В точке x=0 – сходимость.

При $x\to1$ найдем эквивалентную вида $g(x) = C(x–1)^\alpha$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x^4-x} = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x(x^3-1)} = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x(x-1)(x^2+x+1)} \sim \frac{2}{3(x-1)},\quad p = 1.$$

В точке x=1 сходимости нет. Вывод. Заданный в условии задачи интеграл расходится.

9.4. Абсолютная и неабсолютная сходимость несобственных интегралов.

Определение. Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ – несобственный (I или II рода).

Если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то исходный интеграл называется **абсолютно сходящимся.**

Теорема. Абсолютно сходящийся интеграл сходится. (без доказательства)

Сформулированные выше признаки сходимости могут использоваться для выяснения абсолютной сходимости интегралов.

Пример. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ сходится (абсолютно), так как $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ сходится.