РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если функция *f(x)* с периодом 2 π на отрезке [-π; π] удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (2.1)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \quad n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,...$$

Если функция *f(x)* с периодом 2 π на отрезке [0;2 π] удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

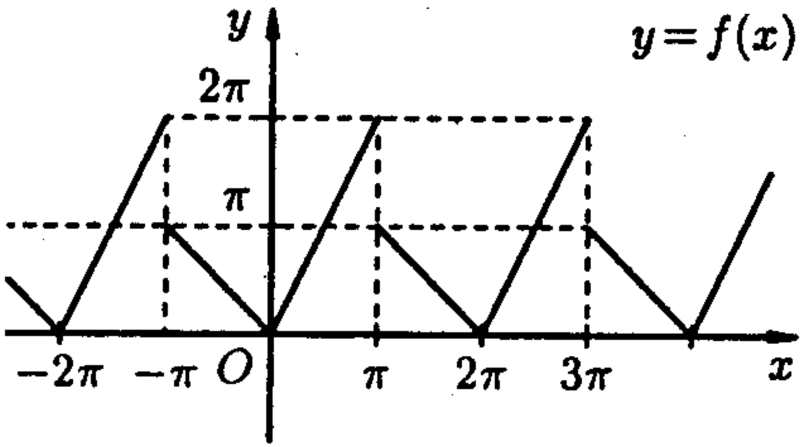
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Пример

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x & \text{при } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Решение



Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит, она разложима в ряд Фурье

Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\,dx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

$$\left(\text{интегрируем по частям: } \left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \cdots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции *f(x)* соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Согласно теореме Дирихле, для внутренних точкой отрезка [-π; π] имеем равенство

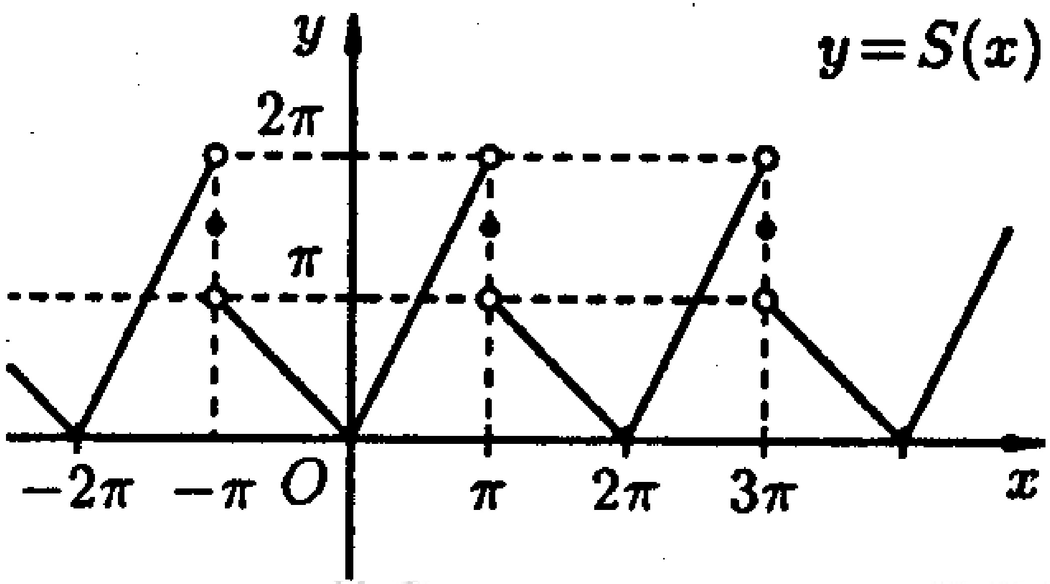
$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \ldots\right).$$

В точках $x = \pm\pi$ сумма $S(x)$ ряда равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

График функции $S(x)$ имеет вид



Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если разлагаемая на отрезке [-π; π] в ряд Фурье функция $f(x)$ является *четной* или *нечетной*, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится **неполным**).

Слайд 10

F1)
Filatov; 04.09.2005

Теорема

Если функция $f(x)$ ***четная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$

Если функция $f(x)$ ***нечетная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

Пусть функция *f(x)*, определенная на отрезке [-*l*;*l*], имеет период *2l* (*f(x + 2l) = f(x)*, где *l* - произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Получим ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Этот ряд называется ***рядом Фурье*** для ***функции f(x)*** с периодом ***T = 2l***

Представление непериодической функции рядом Фурье

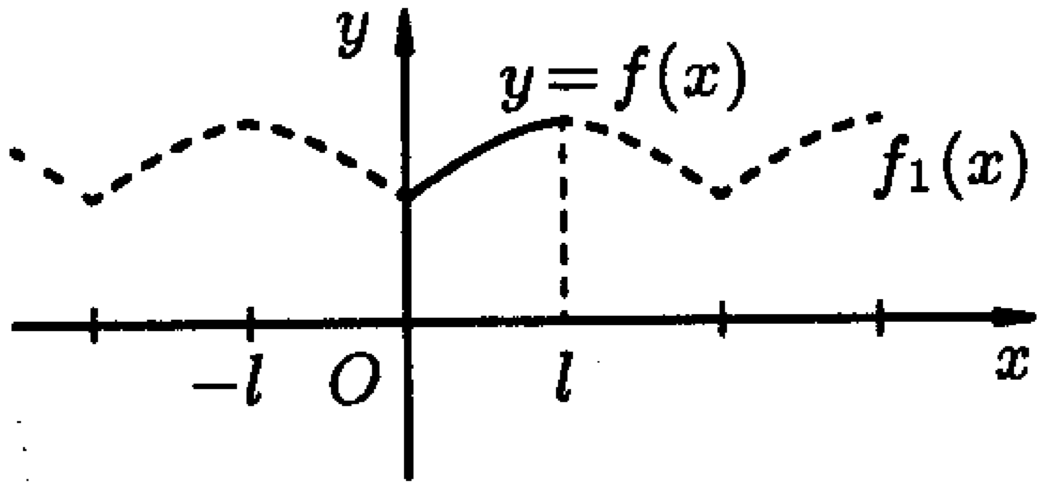
Пусть $y = f(x)$ — непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. **Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье**, т. к. сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

Однако *непериодическая функция f(x) может быть представлена в виде ряда Фурье* на любом *конечном промежутке [a; b],* на котором она удовлетворяет условиям Дирихле.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$.

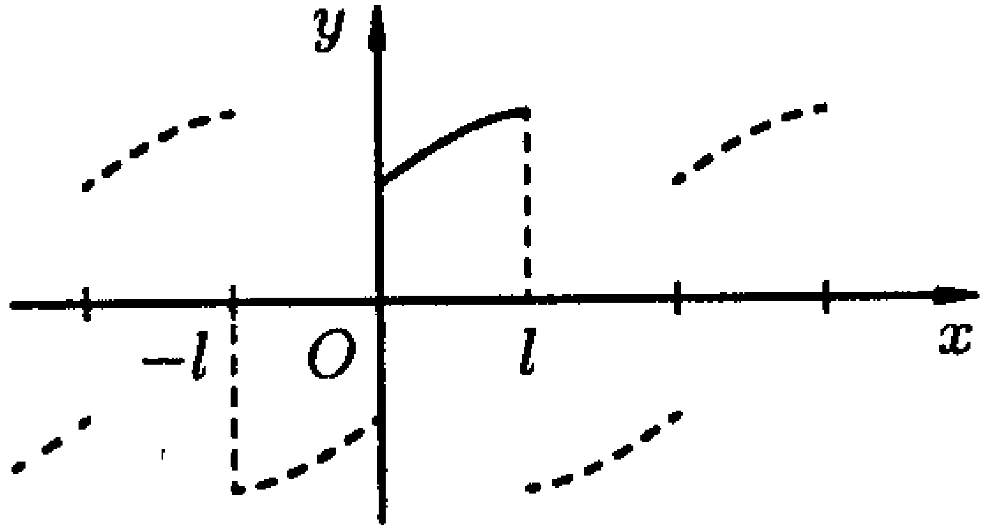
Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$.

В частности, функцию *f(x)* можно доопределить на отрезке [-*l*;0] четным образом



В этом случае функция *f*(*x*) разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $[-l;\ 0]$ нечетным образом



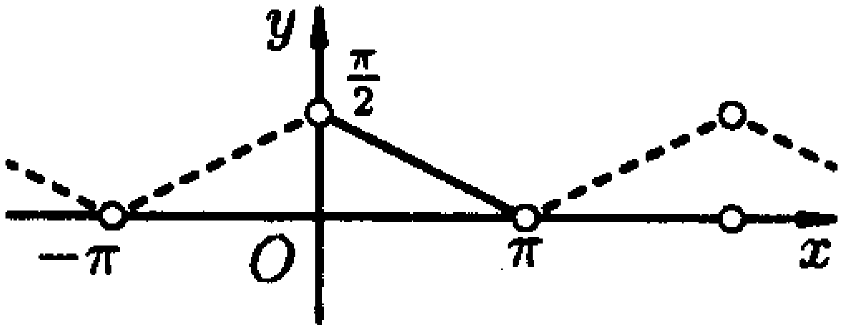
то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов

Пример

Разложить в ряд косинусов функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2},\ 0 < x < \pi.$$

Решение. Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом



Разлагаем в ряд функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos \pi n).$$

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

$$0 < x < \pi$$

При этом

$$S(0) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2},\ S(\pm\pi) = \frac{0+0}{2} = 0$$

Аналогично, положив

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ -f(|x|) & x < 0 \end{cases}$$

и разложив G в ряд Фурье, найдем, что ввиду нечетности G ее ряд будет содержать только члены с синусами.

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad \alpha_n = 0.$$

Примеры из Бермана

4376.1. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx =$
$= \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,d(\sin nx) = \frac{1}{\pi n}\,x^2 \sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx =$
$= \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} x\,d(\cos nx) = \frac{2}{\pi n^2}\,x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx =$
$= \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{\pi n^3}\,x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$; $x^2 = \frac{\pi^2}{3} +$
$+ 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$; при $x = \pi$ $\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow s_1 =$
$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; при $x = 0$ $0 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow s_2 =$
$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$; $s_3 = \frac{s_1+s_2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4380. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2h}{\pi}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\,dx = \frac{2\sin nh}{\pi n}$, $f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh \cos nx}{n}$.

Задание в аудитории

4372, 4373, 4376(2), 4385, 4391

Задание на дом

4375, 4379, 4383, 4388