## Приближенное вычисление значений функций.

## Способы оценки погрешности

*1) Для знакочередующихся рядов*

$$\boxed{|R_n(x)| < |a_{n+1}x^{n+1}|.}$$

*2) Для знакопостоянных рядов (формула Лагранжа)*

$$\boxed{|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x^{n+1}|.}$$

**Пример.** Вычислить $e$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

В интервале $\left[0, M\right] \quad \forall n \quad f^{(n)}(x) \le e^M$.

По теореме об оценке остаточного члена ряда

$$R_n(x) < e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При $M = 1 \quad R_n(x) < e\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} < \varepsilon.$

Если $\varepsilon = 10^{-5}$, то $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \Rightarrow n = 8.$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2,71828.$$

***Пример***

$$\sin x, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$n=1, \ \sin x \approx x, \quad \left|R_n(x)\right| < \frac{x^3}{6}, \quad x \in (0;0.08).$$

$$n=2, \ \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \left|R_n(x)\right| < \frac{x^5}{120}, \quad x \in (0.08;0.4).$$

$$n=3, \ \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \left|R_n(x)\right| < \frac{x^7}{5040}, \quad x \in (0.4;0.9).$$

# Интегрирование функций.

**Пример.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$$

с точностью до $e = 0{,}001$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя $x$ на ($-x^2$) в стандартной формуле

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty;\infty).$$

Интегрируя обе части равенства на отрезке [0; 1/4], лежащем внутри интервала сходимости (—∞;∞), получим:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7} + \ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как

$$\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} = 0{,}0052\ldots > 0{,}001, \qquad \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} < 0{,}001,$$

то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

## *Пример.*

Интегральный синус $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx.$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

**Этот ряд не сходится ни к какой элементарной функции.**

## Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Существует метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же **пример.**

Найти решение уравнения

$$y'' - xy = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Если заданные начальные условия
$y(0)=1; y'(0)=0.$

подставить в исходное дифференциальное уравнение,
$y''-xy=0$
получим, что $y''(0)=0.$

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде
$y''=xy$
и будем последовательно дифференцировать его по $x$.

$$y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1;$$

$$y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0;$$

$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

После подстановки полученных значений получаем:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$$

**2897.** $e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots$; оценим остаток ряда: $r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = \frac{2^n}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2^{m-n}}{(n+1)\ldots m} < \frac{2^n}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2^{m-n}}{(n+1)^{n-m}} = \frac{2^{n+1}}{n!(n-1)}$; $r_n < 0{,}001$ при $n = 9 \Rightarrow e^2 \approx \sum_{n=1}^{9} \frac{2^n}{n!} \approx 7{,}389$.

**2905.** $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\left(1 + \frac{1}{27} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \ldots (3n-4)}{n! 3^{3n}}\right) = 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243} + \frac{5}{3^9} - \ldots$; т. к. $\frac{5}{3^9} < 0{,}001$, $\sqrt[3]{30} \approx 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243} \approx 3{,}107$.

Задание в аудитории

2898, 2902, 2906, 2936, 4114, 4115

Задание на дом

2901, 2909, 2932, 2945,4109,4113