Степенные ряды.

Определение.
Степенным рядом называют функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad \textbf{(*)}$$

Если $x_0 = 0$, то имеем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad \textbf{(**)}$$

В дальнейшем будем рассматривать ряды вида **(**)**, т. к. они сводятся к рядам вида **(*)** подстановкой $x - x_0 = x'$.

Область сходимости.

Возможны три случая:

1) Область сходимости состоит только из одной точки $x = 0$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$

Действительно $\forall x \ \exists N: \ \forall n > N \ \left|n^n x^n\right| > 1.$

Радиус сходимости R =0

2) Область сходимости $D=(-\infty,\infty)$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

Действительно $\forall x\ \ \exists N:\ \forall n>N\ \left|\frac{x}{n}\right|<1$ и для $n>N$ члены ряда меньше сходящейся геометрической прогрессии.

Радиус сходимости $R=\infty$

3) Область D ограничена.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$,

$D=(-1,1)$.

Радиус сходимости $R=1$

Из признака Даламбера радиус абсолютной сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Замечание.

Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то **интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости,** а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

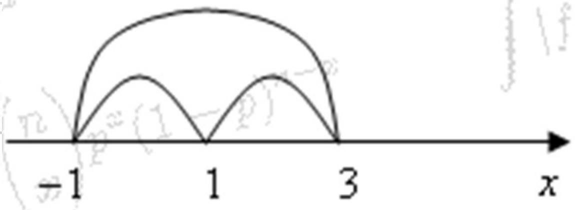
$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - ряд расходится,

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - ряд сходится условно.

Окончательно $x \in [-1,1)$.

Пример. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2.$$



$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$ - ряд сходится условно,

$$x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ - ряд расходится,

$$x\in[-1,3).$$

Ряд Тейлора

Как известно для любой функции *f(x)*, определенной в окрестности точки хо и имеющей в ней производные до (n + 1)-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, c \in (x_0, x),$$

остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$.

Другое определение ряда Тейлора

Как известно для любой функции *f(x)*, определенной в окрестности точки хо и имеющей в ней производные до ($n+1$)-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, c \in (x_0, x),$$

--

остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \,, \; |x| < 1.$$

Задание на дом

2843, 2847, 2864, 2865, 2870(3), разложить функцию
y = ln(x +) в ряд Маклорена