Функциональные ряды.

Для представления различных функций в математическом анализе широко используются ряды и последовательности, членами которых являются **не числа, а функции**, определенные на некотором фиксированном множестве

Такие ряды и последовательности называются **функциональными**.

Итак, зафиксировав некоторую точку x, мы имеем дело с обычным числовым рядом.

Функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся в точке x,* если последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится к $S(x)$ или

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x)$, что $\forall n > N\ |S_n(x) - S(x)| = |u_{n+1}(x) + ...| < \varepsilon$.

Это - обычная или ***поточечная*** сходимость ряда, так как номер N зависит не только от ε, как в числовых рядах, но и от точки x. То есть в каждой точке x ряд сходится со своей скоростью.

Ox.

Множество всех точек x_0, в которых сходится данная функциональная последовательность (функциональный ряд), называется **областью сходимости** этой последовательности (ряда).

Мы будем рассматривать в качестве области сходимости – интервал оси Оx

В конкретных ситуациях область сходимости может совпадать с областью определения, являться подмножеством области определения или вообще быть пустым множеством.

Ox.

Множество всех точек x_0, в которых сходится данная функциональная последовательность (функциональный ряд), называется **областью сходимости** этой последовательности (ряда).

Мы будем рассматривать в качестве области сходимости – интервал оси Ox

В конкретных ситуациях область сходимости может совпадать с областью определения, являться подмножеством области определения или вообще быть пустым множеством.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ такой, что $\forall x \in D \ |u_n(x)| < c_n$.

В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называют **мажорантой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или **мажорирующим рядом**.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

$$\forall x \quad \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Т. к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно.

Пример.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится $\forall x$. Сумма ряда равна $S(x)=e^x$.

Эта сходимость равномерная для любой конечной области D, т. к.

$\left|S(x)-S_n(x)\right|<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}<\varepsilon$. x^{n+1} растет медленнее $(n+1)!$.

Для всей числовой оси сходимость неравномерная, т. к. $\forall n$

можно найти такое x, что $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}>\varepsilon$.

Задание на дом

2809,2811, 2813, 2815, 2917,2879, 2884,2885, 2889