Знакопеременные ряды.

Определение

Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным

Пример знакопеременного ряда $1+2-3-4-5+6+7-\ldots$.

Теорема

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится, если сходится ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Определение

Если сходится ряд из абсолютных величин, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают

Определение

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют **условно сходящимся**,

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Знакочередующиеся ряды.

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

Признаки сходимости знакочередующихся рядов

Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1.07.1646– 14.11.1716), немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед.

Теорема (признак Лейбница).

Если в знакочередующемся ряде

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\quad u_n \ge 0.$$

$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ **и** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ **то ряд сходится. Причем**

$S < u_1,\ |r_n| < u_{n+1}.$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$

Ряд сходится по признаку Лейбница,

т. к. $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Ряд сходится условно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$ расходится

Но ряд сходится плохо, т. к. $|r_n| < \frac{1}{n}.$

Пример.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ $(p>0)$ является знакочередующимся.

При $p > 0$ он удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ и, следовательно, сходится.

Если заменить все члены их абсолютными величинами, получим обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$. Таким образом, исходный знакочередующийся ряд при $p > 1$ сходится абсолютно, а при $0 < p \le 1$ сходится условно.

Минимальные требования

Необходимый признак сходимости	
Ряды с положительными членами	**Знакопеременные ряды**
Признаки сравнения **Признак Даламбера** **Признак Коши** **Интегральный признак**	**Теорема Лейбница (знакочередующиеся ряды)** **Теорема об абсолютной сходимости (знакопеременные ряды)**

2790. $|a_n| = \frac{1}{2n-1}$, сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится; $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. $|a_n| \downarrow \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно.

Задачи в аудитории

2791, 2795, 2797, 2798, 2799, 2800

Задачи на дом

2792, 2793, 2794,2796, 2801

2798. $|a_n| = \frac{1}{n - \ln n}$, сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n - \ln n} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится; $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 0$, $|a_n| \downarrow \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно.