

Знакопеременные ряды.

Определение

Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным

Пример знакопеременного ряда $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 + 7 - \dots$

Теорема

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Определение

Если сходится ряд из абсолютных величин, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают

Определение

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют **условно сходящимся**,

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Знакопередающиеся ряды.

$$\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

Признаки сходимости знакопередающихся рядов



Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1.07.1646– 14.11.1716), немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед.

Теорема (признак Лейбница).

Если в знакочередующемся ряде

$$\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

$u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится. Причем

$$S < u_1, \quad |r_n| < u_{n+1}.$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Ряд сходится по признаку Лейбница,

т. к. $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Ряд сходится условно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

Но ряд сходится плохо, т. к. $|r_n| < \frac{1}{n}$.

Пример.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ ($p > 0$) является знакочередующимся.

При $p > 0$ он удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1) \frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{и, следовательно, сходится.}$$

Если заменить все члены их абсолютными величинами, получим обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Таким образом, исходный знакопередающийся ряд при $p > 1$ сходится абсолютно, а при $0 < p \leq 1$ сходится условно.

Минимальные требования

Необходимый признак сходимости	
Ряды с положительными членами	Знакопеременные ряды
Признаки сравнения Признак Даламбера Признак Коши Интегральный признак	Теорема Лейбница (знакопеременные ряды) Теорема об абсолютной сходимости (знакопеременные ряды)

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2790. $|a_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$, сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится; $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, $|a_n| \downarrow \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно.

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{1}{1-r}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Задачи в аудитории

2791, 2795, 2797, 2798, 2799, 2800

Задачи на дом

2792, 2793, 2794, 2796, 2801

2798. $|a_n| = \frac{1}{n - \ln n}$, сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится; $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, $|a_n| \downarrow \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно.