Предельная форма признака Даламбера (признак Даламбера)

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ (u_n > 0).$

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$ то

при $\rho < 1$ **- ряд сходится,**

при $\rho > 1$ **- ряд расходится,**

при $\rho = 1$ **- ряд может сходится или расходиться.**

Предпосылки для применения признака Даламбера

1) В общий член ряда («начинку» ряда) входит какое-нибудь число в степени, например

$$2^{*}, 5^{*}, 9^{*} .$$

и так далее. Причем, совершенно не важно, где эта штуковина располагается, в числителе или в знаменателе – важно, что она там присутствует.

2) В общий член ряда входит факториал

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - n^2 + 3}{4^n \cdot (n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^4 - (n+1)^2 + 3}{4^{n+1} \cdot (n+1+1)}}{\dfrac{n^4 - n^2 + 3}{4^n \cdot (n+1)}} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^4 - (n+1)^2 + 3) \cdot (n+1)}{4^{n+1} \cdot (n^4 - n^2 + 3) \cdot (n+2)} \overset{(3)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^4 - (n+1)^2 + 3) \cdot (n+1)}{4 \cdot 4^n \cdot (n^4 - n^2 + 3) \cdot (n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

$\downarrow$ 1 $\qquad\qquad$ $\downarrow$ 1

Одного порядка роста

Предельная форма радикального признака Коши. (радикальный признак Коши).

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \left(u_n > 0\right)$.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

при $l < 1$ **- ряд сходится,**

при $l > 1$ **- ряд расходится,**

при $l = 1$ **- ряд может сходится или расходиться.**

Когда нужно использовать радикальный признак Коши? Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда **ПОЛНОСТЬЮ** находится в степени,зависящей от «n».

Либо когда корень $\sqrt[n]{a_n}$ «хорошо» извлекается из общего члена ряда

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

.

Решение. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1$$

В соответствии с радикальным признаком Коши, ряд расходится.

Теорема (интегральный признак Коши (Коши-Маклорена)**).**

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$, **члены которого являются значениями непрерывной функции** $f(x)$ **при целых значениях аргумента** x**:** $u_1 = f(1), ..., u_n = f(n), ...$ **и пусть** $f(x)$ **монотонно убывает в интервале** $[1, \infty)$.

Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ **и расходится, если интеграл расходится.**

Основной предпосылкой использования интегрального признака Коши является тот факт, что в общем члене ряда есть некоторая функция и её производная.

Пример

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Теперь нужно вычислить несобственный интеграл

Подынтегральная функция непрерывна на $[2;+\infty)$

$$(*) = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln |\ln x| \right)\Big|_2^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln \ln b^{\to +\infty} - \ln \ln 2 \right) = +\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится** вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Замечание. У каждого признака сходимости есть своя «зона нечувствительности». Ни признак Даламбера, ни радикальный признак Коши не позволяют установить расходимость гармонического ряда. Проверьте это. Гармонический ряд расходится, но расходится так слабо, что попадает в «зону нечувствительности» указанных признаков. Интегральный признак Коши имеет меньшую «зону нечувствительности» и позволяет установить расходимость гармонического ряда.

Пример. Применим интегральный признак к *гармоническому ряду*.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln b-\ln 1=+\infty$$ - интеграл расходится,

поэтому и гармонический ряд расходится

Пример задач из Бермана

2757. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n-3}=\frac{3}{4}<1\Rightarrow$ ряд сходится.

2766. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3}=\frac{e}{3}<1\Rightarrow$ ряд сходится.

2780. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n}}=2>1$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\right)\Rightarrow$ ряд расходится.

2787. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{((2n+2)!)^2}\cdot\frac{(2n)!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\times$ $\times\frac{n+1}{(2n+2)^2(2n+1)^2}=e\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+2)(2n+1)^2}=0<1\Rightarrow$ ряд сходится$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

Задание в аудитории

2754, 2756, 2758, 2763, 2764, 2768, 2770, 2773, 2775, 2779, 2788

Задание на дом

2755, 2760, 2765. 2767, 2776, 2778, 2781, 2782, 2783, 2785