ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

Определение ряда и его суммы.

Пусть дана бесконечная последовательность $u_1, u_2, ..., u_n, ...$.

Определение. **Выражение** $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ **называется рядом, а числа** $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ **- членами ряда.**

Краткая запись $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. u_n - общий член ряда.

Ряд считается заданным, если задана функция $u_n = f(n)$.

Исследование сходимости рядов, как правило, сводится к вычислению некоторых пределов, при этом часто используются известные условия эквивалентности бесконечно малых, которые применительно к рядам принимают вид при $n \to \infty$

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \mathrm{tg}\,\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\arcsin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \mathrm{arctg}\,\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p} = 0 \;\; (p>0), \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p} = 1$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

Необходимый признак сходимости ряда.

Необходимый признак. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Доказательство. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_{n-1} + u_n,$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости ряда.

Признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (1), \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ (2) \ \left(u_n > 0, \ v_n > 0\right) \text{ и } \forall n \ \ u_n \le v_n. \quad (*)$$

Тогда:

1) если сходится ряд (2), то сходится ряд(1);

2) если расходится ряд (1), то расходится ряд(2).

$$1) \ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \ \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, \ \ \sigma_n < \sigma \Rightarrow S_n \le \sigma_n < \sigma.$$

Частичныеи суммы ограничены и в силу доказанного ряд (1) сходится.

$$2) \ S_n \to \infty, \ \sigma_n \ge S_n \Rightarrow \sigma_n \to \infty.$$

Гармонический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Гармонический ряд расходится

Доказательство

Запишем ряд в виде

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots >$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Очевидно, что этот ряд расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad u_n \to 0$$

Ряд расходится

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty.$$

Пример (ряд геометрической прогрессии) .

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0,\ |q| < 1);$$

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}.$$

Если **|q |<1,** то $q^n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1-q} = S.$

ряд сходится.

Если **|q |>1**, то $q^n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty.$

ряд расходится

Если **q =1**, то $q^n = 1$, $S_n = na$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty.$

ряд расходится

Предельный признак сравнения.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=A>0$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно т.е. если один из них сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится. Это понятие часто употребляют при сравнении рядов..

Доказательство.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N:\ \forall n>N\ \left|\frac{u_n}{v_n}-A\right|<\varepsilon \ \text{ или } \ A-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<A+\varepsilon.$$

Пусть ряд (2) сходится.

Тогда по свойству 1 сходящихся рядов сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n$ и

т.к. $u_n<(A+\varepsilon)v_n\ \ \forall n>N$ следовательно ряд (1) сходится.

Если ряд (2) расходится, то в силу $u_n>(A-\varepsilon)v_n\ \ \forall n>N$ ряд (1) расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 - 1}.$$

Сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n^2 - 1} \cdot n = \frac{2}{3}.$$

Исходный ряд расходится.

Примеры из Бермана

2728. $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{2(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\Rightarrow$ $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$; $S=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

2752. $a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}=\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$; сравним со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}:\frac{1}{n^{3/2}}=1\neq$ $\neq 0\Rightarrow$ ряд сходится.

Задание в аудитории
2727,2733 , 2739,. 2742, 2744, 2745, 2747

Задание на дом
2730, 27231,2738, 2741,2743, 2748, 2750, 2754