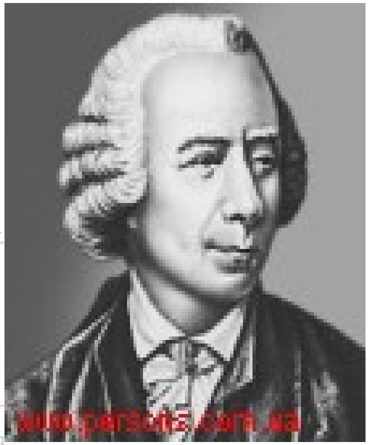
Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad a_{ij} = const.$$

1. Систему можно свести к одному дифференциальному уравнению n- го порядка.

2. Метод Эйлера



Будем искать частные решения в виде $x_1 = k_1 e^{rt}, \ldots, x_n = k_n e^{rt}$, где $k_1, \ldots, k_n, r$ - неопределенные постоянные. Подставляя эти решения в систему, получим

$$\begin{cases} k_1 r e^{rt} = a_{11} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{1n} k_n e^{rt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n r e^{rt} = a_{n1} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{nn} k_n e^{rt}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases}(a_{11}-r)k_1+\ldots+a_{1n}k_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}k_1+\ldots+(a_{nn}-r)k_n=0.\end{cases}$$

Чтобы система однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, определитель системы равнялся нулю

$$\begin{vmatrix}(a_{11}-r) & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & (a_{nn}-r)\end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получим **характеристическое уравнение**.

Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений.

Корни действительные и простые.

Для каждого корня r_i $(i = 1,2,3)$ напишем систему

$$\begin{cases} (a_{11} - r_i)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r_i)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r_i)k_3 = 0. \end{cases}$$

и определим коэффициенты $k_j^{(i)}$

Замечание

Определитель системы равен нулю и возможных решений бесконечно много.

Уравнения линейно зависимы и один из коэффициентов можно считать равным единице

Таким образом, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$k_1^{(1)} e^{r_1 t},\ k_2^{(1)} e^{r_1 t},\ k_3^{(1)} e^{r_1 t};$$
$$k_1^{(2)} e^{r_2 t},\ k_2^{(2)} e^{r_2 t},\ k_3^{(2)} e^{r_2 t};$$
$$k_1^{(3)} e^{r_3 t},\ k_2^{(3)} e^{r_3 t},\ k_3^{(3)} e^{r_3 t}.$$

Можно показать, что эти функции образуют фундаментальную систему.

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 k_1^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_1^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_1^{(3)} e^{r_3 t}, \\
x_2 &= C_1 k_2^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_2^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_2^{(3)} e^{r_3 t}, \\
x_3 &= C_1 k_3^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_3^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_3^{(3)} e^{r_3 t}.
\end{aligned}
$$

Пример.

$$\begin{cases} x' = z, \\ y' = -4x - y - 4z, \\ z' = -y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -rk_1 + k_3 = 0, \\ -4k_1 - (1+r)k_2 - 4k_3 = 0, \\ -k_2 - rk_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1 \\ -4 & -(1+r) & -4 \\ 0 & -1 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - r^2 + 4r + 4 = \left(4 - r^2\right)(r+1) = 0.$$

$$r_1 = -1,\ r_2 = -2,\ r_3 = 2.$$

Возьмем 1-е и 3-е уравнения.

$$r_1 = -1, \quad \begin{cases} k_1^{(1)} + k_3^{(1)} = 0, \\ -k_2^{(1)} + k_3^{(1)} = 0, \end{cases} \quad k_1^{(1)} = 1, \ k_2^{(1)} = -1, \ k_3^{(1)} = -1.$$

$$x_1 = e^{-t}, \ y_1 = -e^{-t}, \ z_1 = -e^{-t}.$$

$$r_2 = -2, \quad \begin{cases} 2k_1^{(2)} + k_3^{(2)} = 0, \\ -k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} = 0, \end{cases} \quad k_1^{(2)} = 1, \ k_2^{(2)} = -4, \ k_3^{(2)} = -2.$$

$$x_2 = e^{-2t}, \ y_2 = -4e^{-2t}, \ z_2 = -2e^{-2t}.$$

$$r_3 = 2, \quad \begin{cases} -2k_1^{(3)} + k_3^{(3)} = 0, \\ -k_2^{(3)} - 2k_3^{(3)} = 0, \end{cases} \quad k_1^{(3)} = 1, \ k_2^{(3)} = -4, \ k_3^{(3)} = 2.$$

$$x_3 = e^{2t}, \ y_3 = -4e^{2t}, \ z_3 = 2e^{2t}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{2t}, \\ y = -C_1e^{-t} - 4C_2e^{-2t} - 4C_3e^{2t}, \\ z = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t} + 2C_3e^{2t}. \end{cases}$$

Задание на дом

4324 (4,5)

Пример задания на контрольной работе

1. $y' + 2xy = (1 - \sin x + \cos x)\, e^{-x^2}, \quad y(0) = 4$
2. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$
3. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$
4. $y' = 6y/(2x + 3y)$
5. $y'' - 3y' = 9e^{3x}/(3 + e^{3x})$