Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $y = y_{oo} + u_{нч}.$,

где y_{oo} – общее решение однородного уравнения

$u_{нч}$ –частное решение неоднородного уравненния

Решение однородного дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const.$

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет n корней. **Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения**

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь

n **различных действительных корней,**

вещественные корни среди которых могут быть кратные,

комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) **каждому действительному корню соответствует решение** e^{kx};

б) **каждому действительному корню кратности** $\boldsymbol{m}$ **ставится в соответствие** $\boldsymbol{m}$ **решений**:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \dots \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) **каждой паре комплексно – сопряженных корней** $\alpha \pm i\beta$ **характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:**

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x\,.$$

г) **каждой паре *m* – кратных комплексно – сопряженных корней** $\alpha \pm i\beta$ **характеристического уравнения ставится в соответствие 2*m* решений:**

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример.

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1,\ \ r^4 + 2r^2 + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1,\ \alpha = -1,\ \ \beta = 0,\ \ s = 1.$$

$$r_{2,3,4,5} = \pm i,\ \ \alpha = 0,\ \ \beta = 1,\ \ s = 2.$$

$$y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x.$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида..

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ - многочлен степени m.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно. Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m- большая из степеней m_1 и m_2.

Замечание

Если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0;$ $\quad k_{1,2} = \pm i;$

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0,\quad r = 0, Q(x) = Ax + B;$ Т.е. $\quad y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x;$

1. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x).$$

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем:

$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$

$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$

$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

Примеры из Бермана

4275.9. $k^2-3k+2=0$, $k_1=2$, $k_2=1$, $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^x$; y_1 — решение $y''-3y'+2y=2e^x$, 1 — корень хар. уравнения $\Rightarrow$ $y_1=Axe^x$, $y_1'=e^x(Ax+A)$, $y_1''=e^x(Ax+2A)$, $A=2$, $y_1=-2xe^x$; y_2 — решение $y''-3y'+2y=-e^{-2x}$, -2 — не корень хар. уравнения $\Rightarrow$ $y_2=Ae^{-2x}$, $A=-\frac{1}{12}$, $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$.

4280. $y''+y+\operatorname{ctg}^2x=0$, $k^2+1=0$, $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ — решение однородного уравнения, $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$ — решение неоднородного уравнения,

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0\\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=-\operatorname{ctg}^2x\end{cases},\quad C_1'=\frac{\cos^2x}{\sin x},\quad C_2'=-\frac{\cos^3x}{\sin^2x},$$

$C_1(x)=\int\frac{\cos^2x\sin x}{\sin^2x}dx$ $[u=\cos x]=\int\frac{u^2}{u^2-1}du=u+\frac{1}{2}\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C_1=\cos x+\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C_1$, $C_2(x)=-\int\frac{\cos^3x}{\sin^2x}=-\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}d(\sin x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}+C_2$, $y=\cos^2x+\cos x\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C_1\cos x+\sin^2x+1+C_2\sin x=\cos x\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+2+C_1\cos x+C_2\sin x$.

Задачи в аудитории
4275(2), 4275(3), 4268, 4282(2), 4321

Задачи на дом
4281, 4282(1,3)