Однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами.

Решение с помощью формулы Остроградского — Лиувилля.

Если исходное уравнение было написано в виде:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

то существует равенство, определяющее определитель Вронского (с точностью до постоянного множителя) через коэффициент данного уравнения при $y^{(n-1)}$, которое носит название ***формулы Остроградского — Лиувилля.***

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1\, dx}$$

Применим формулу Остроградского — Лиувилля к нахождению общего решения уравнения второго порядка,

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$

у которого нам известно одно частное решение y_1

Пусть y есть любое решение этого уравнения, отличное от y_1

Составляем $W[y_1, y]$ *и пишем его значение по формуле* Остроградского — Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1\,dx}.$$

Получаем для *y* линейное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель, имеем:

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int p_1\,dx};$$

деля обе части на y_1^2 находим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int p_1\,dx},$$

откуда *y определяется квадратурой:*

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{Ce^{-\int p_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C' \right\}.$$

Пример. Решить уравнение $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция $y_1 = x.$

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \qquad 0 - 2x + 2x = 0;$$

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 x; \qquad y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx;$$

$$y = C_2 x + C_1 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right];$$

Однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Ищем решение в виде $y = e^{rx}$, где r - действительное или комплексное число.

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Подставим y, y', y'' в дифференциальное уравнение

$$e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0, \quad e^{rx} \neq 0.$$

Получили **характеристическое уравнение** $r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$

Рассмотрим 3 варианта решения этого уравнения.

1) $r_1 \neq r_2$ действительные числа.

Получим два решения дифференциального уравнения

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}. \quad \frac{y_2}{y_1} = e^{(r_2 - r_1)x} \neq const.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2$ - произвольные постоянные.

$$W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x_0}\left(r_2 - r_1\right) \neq 0.$$

Пример.

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

$$r^2 - r - 2 = 0, \qquad r_1 = 2,\ r_2 = -1.$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

$$y\big|_{x_0=0} = 2,\ y'\big|_{x_0=0} = -5. \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 2C_1 - C_2 = -5. \end{cases} \qquad C_1 = -1,\ C_2 = 3.$$

$$y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

2) $r_1 = r_2$ **действительное число.** $y_1 = e^{r_1 x}.$

Покажем, что

$$y_2 = xe^{r_1 x}.$$

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x},$$

$$y_2'' = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}.$$

Подставим в уравнение

$$2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} + a_1\left(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}\right) + a_2 x e^{r_1 x} =$$

$$e^{r_1 x}\left[x\left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2\right) + \left(2r_1 + a_1\right)\right] = e^{r_1 x}\left(2r_1 + a_1\right).$$

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

По теореме Виета $r_1 + r_2 = 2r_1 = -a_1$, т.е. $(2r_1 + a_1) = 0$.

$$W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & x_0 e^{r_1 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & e^{r_1 x_0} + r_1 e^{r_1 x_0} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x_0} \neq 0.$$

Следовательно $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$.

2) $r_1 = r_2$ **действительное число.** $y_1 = e^{r_1 x}$.

Покажем, что

$$y_2 = xe^{r_1 x}.$$

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x},$$

$$y_2'' = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}.$$

Подставим в уравнение

$$2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} + a_1\left(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}\right) + a_2 x e^{r_1 x} =$$

$$e^{r_1 x}\left[x\left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2\right) + \left(2r_1 + a_1\right)\right] = e^{r_1 x}\left(2r_1 + a_1\right).$$

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

По теореме Виета $r_1 + r_2 = 2r_1 = -a_1$, т.е. $(2r_1 + a_1) = 0$.

$$W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & x_0 e^{r_1 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & e^{r_1 x_0} + r_1 e^{r_1 x_0} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x_0} \neq 0.$$

Следовательно $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$.

Пример.

$$y'' - 6y' + 9y = 0;$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0,$$

$$r_1 = r_2 = 3.$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{3x}.$$

3) Корни комплексные

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \beta \neq 0.\ \ y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Найдем два действительных частных решения уравнения

По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right).$$

Составим две линейные комбинации решений

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x = \tilde{y}_1 \quad \text{и} \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x = \tilde{y}_2.$$

Тогда $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$.

Пример.

$$y'' - 4y' + 13y = 0;$$
$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) **каждому действительному корню соответствует решение** e^{kx};

б) **каждому действительному корню кратности** $\boldsymbol{m}$ **ставится в соответствие** $\boldsymbol{m}$ **решений**:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) **каждой паре комплексно – сопряженных корней** $\alpha \pm i\beta$ **характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:**

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x\,.$$

г) **каждой паре *m* – кратных комплексно – сопряженных корней** $\alpha \pm i\beta$ **характеристического уравнения ставится в соответствие 2*m* решений:**

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример. Решить уравнение. $y''' - y = 0$

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0;$

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k^2 + k + 1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 = -3; \qquad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

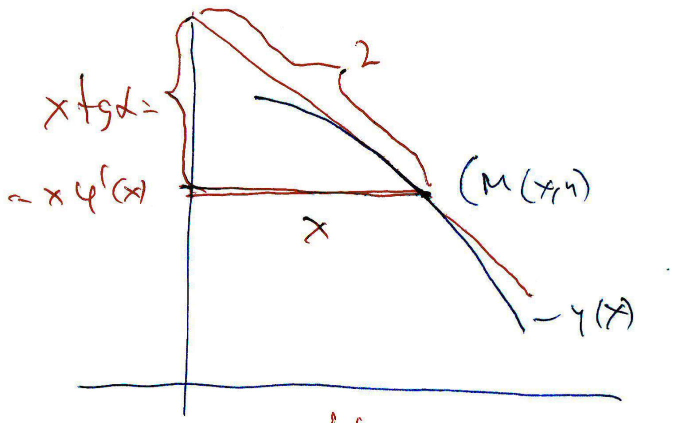
Задачи в аудитории

4233, 4238, 4251, 4254, 4257, 4250. 4262, 4301, 4305, 4304, 4310

Задачи на дом

4234, 4239, 4252, 4256, 4263, 4229, 4304, 4306, 4309

Подсказка для задачи 3918



$$\underbrace{2^2 = x^2 + x^2\left(y'(x)\right)^2}_{\text{уравнение}}$$