Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Определение. Уравнения вида $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид $y'' = f\left(x, y, y'\right)$.

Частные случаи дифференциальных уравнений 2-го порядка. $y'' = f(x, y, y')$.

1) Уравнение не содержит y и y'. $y'' = f(x)$.

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$y = \int \left[\int f(x)\,dx \right] dx + C_1 x + C_2.$$

2) Уравнение не содержит y. $y'' = f(x, y')$.

Замена $y' = z \Rightarrow y'' = z'$.

$$z' = f(x, z).$$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$z = \varphi(x, C_1)$, $y' = z$, $y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2$.

Пример. $$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

$$y' = z,$$

$$z' + \frac{z}{x} = x,$$

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \quad y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3) Уравнение не содержит x. $y'' = f(y, y')$.

Замена $y' = z(y) \Rightarrow y'' = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = z'z.$

$$zz' = f(y, z).$$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi(y, C_1), \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1), \qquad \int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = x + C_2.$$

Пример. $2yy'' + y'^2 = 0.$

$$y' = z(y), \quad y'' = z'z.$$

$$2yz'z = -z^2, \qquad \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}, \qquad \ln|z| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad (y > 0).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad \sqrt{y^3} = C_1 x + C_2.$$

При сокращении на z было потеряно решение $z = y' = 0$, т.е. $y = const$.

Пример

4190. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $[z = y']$ $z' - \frac{z}{x} + z^2 = 0$, $[z = uv]$ $u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = -u^2v^2$, $v = x$, $u' = -u^2x$, $\frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} + C$, $u = \frac{2}{x^2+C}$, $z = \frac{2x}{x^2+C}$, $z(2) = 1 \Rightarrow C = 0$, $y' = \frac{2}{x}$, $y = 2\ln x + C$, $y(2) = 2 \Rightarrow C = 2 - \ln 4$, $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$.

Задание в аудитории

4156, 4162. 4193, 4165, 4197

Задание на дом

4157, 4160. 4163. 4185, 4195, 4199