Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение

Если левая часть уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то это уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

Это выполняется, если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области и $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y).$$

$$u(x;y) = \int P(x;y)\,dx + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

$$Q(x;y) = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

$$\varphi'(y) = Q(x;y) - \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y.$$

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x;y)\,dx\right)\right) dy + c,$$

Пример.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

$$P=\frac{\sin 2x}{y}+x \qquad Q=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)'_y=-\frac{\sin 2x}{y^2}+0=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)'_x=0-\frac{2\sin x}{y^2}\cdot(\sin x)'_x=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

Таким образом

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное дифференциальное уравнение является

уравнением в полных дифференциалах

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Второй (зеркальный) метод решения

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x$ – эту производную пока забываем.

$\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$ –будем работать с этой производной.

$$F=\int\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=\int y\,dy-\sin^2 x\int\frac{dy}{y^2}=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)\right)'_x=0+\frac{2\sin x\cos x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+\varphi'_x(x)$$

Приравниваем

$$\frac{\sin 2x}{y} + \varphi'_x(x) = \frac{\sin 2x}{y} + x$$

$$\varphi'_x(x) = x$$

$$\varphi(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Подставляем в недостроенный общий интеграл $F = \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x)$

Получаем **ответ:** общий интеграл:

$$\frac{y^2 + x^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + C = 0, \text{ где } C = const$$

Другой способ отыскания решения основан на формулах, полученных при изучении криволинейных интегралов второго рода

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C.$$

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C.$$

В качестве точки (x_0;y_0) выбирают точку удобную для вычислений. Обычно подходит точка (0;0). Но не всегда.

Пример.

$$\left(x+y-1\right)dx+\left(e^{y}+x\right)dy=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} P\left(x,y\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q\left(x_0,y\right)dy=C.$$

Положим $x_0 = y_0 = 0.$

$$\int_0^x (x+y-1)\,dx + \int_0^y e^y\,dy = C,$$

$$\left.\left(\frac{x^2}{2} + yx - x\right)\right|_o^x + \left. e^y \right|_0^x = C, \qquad \frac{x^2}{2} + yx - x + e^y - 1 = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + yx - x + e^y = C.$$

Пример из Бермана

4055. $u = \int \left(\frac{y}{\cos^2(xy)} + \sin x \right) dx + \varphi(y) = \operatorname{tg}(xy) - \cos x + \varphi(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\cos^2(xy)} + \varphi'(y) = \frac{x}{\cos^2(xy)} + \sin y \Rightarrow \varphi'(y) = \sin y$, $\varphi(y) = -\cos y$, $\operatorname{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C$.

Задачи в аудитории
4050, 4051, 4056, 4068, 4083

Задачи на дом
4052, 4054, 4053, 4072, 4084