Линейные дифференциальные уравнения

Определение.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x),$$

т.е. линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y', называется линейным.

Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода:

метод Лагранжа и ***метод Бернулли.***

Метод Бернулли (метод замены переменной).

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Представим неизвестную функцию как произведение двух функций $y = uv, \quad y' = u'v + uv'.$

Подставим в исходное уравнение y и y'.

Получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Потребуем, чтобы функция v была такой, что выражение $\left(v' + p(x)v\right)$ тождественно равнялось нулю.

Тогда исходное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными $\left(v' + p(x)v\right) = 0$ и $u'v = q(x)$.

Решим их последовательно

1) $v' + p(x)v = 0, \ \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)\,dx, \ \ln v = -\int p(x)\,dx, \ v = e^{-\int p(x)dx}.$

2) $u'v = q(x), \ u'e^{-\int p(x)dx} = q(x), \ du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$

$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$

$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$

Пример. Решить уравнение

$$x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}.$$

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:

$$y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}.$$

Применим полученную выше формулу:

$$p = \frac{1}{x^2}; \quad q = ae^{\frac{1}{x}};$$

$$y = e^{-\int\frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int adx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Примеры из Бермана

3955. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $[y = uv,\ y' = u'v + uv']$ $u'v + u(v' + 2vx) = xe^{-x^2}$, $v' + 2vx = 0$, $\int \frac{dv}{v} = -\int 2x\,dx$, $v = e^{-x^2}$, $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$, $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2} + C$, $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

3961. $y' = \frac{1}{2x - y^2} \Leftrightarrow x' = 2x - y^2$, $[x = uv]$ $u'v + u(v' - 2v) = -y^2$, $v' - 2v = 0$, $\frac{dv}{v} = 2dy$, $v = e^{2y}$, $u'e^{2y} = -y^2$, $u = -\int e^{-2y} y^2 dy = \frac{1}{2}\int y^2 d(e^{-2y}) = \frac{1}{2} y^2 e^{-2y} - \int y e^{-2y} dy = \frac{1}{2} y^2 e^{-2y} + \frac{1}{2}\int y\, d(e^{-2y}) = \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y\right)e^{-2y} - \frac{1}{2}\int e^{-2y} dy = e^{-2y}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) + C$, $x = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + Ce^{2y}$.

4045. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$, $y' - 4\frac{y}{x} - x\sqrt{y} = 0$, $[y = uv]$ $u'v + u\left(v' - 4\frac{v}{x}\right) = x\sqrt{uv}$, $\frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x}$, $v = x^4$, $u'x^4 = x^3\sqrt{u}$, $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$, $2\sqrt{u} = \ln|Cx|$, $u = \frac{\ln^2|Cx|}{4}$, $y = \frac{x^4 \ln^2|Cx|}{4}$.

Задание в аудитории

3954, 3965, 3988, 4005, 3967, 3962, 4044, 4042

Задание на дом

3960, 3957, 3960, 3957, 3992, 4038, 4039