Определение. Дифференциальные уравнения, **в которых переменные можно разделить** посредством умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)},\quad \int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C.$$

$$P(x)Q(y)\,dy+M(x)N(y)\,dx=0,\quad \int\frac{Q(y)}{N(y)}dy+\int\frac{M(x)}{P(x)}dx=C.$$

Внимание! Может произойти потеря решения.

$g(y)=0$; $N(y)=0$; $P(x)=0$

Пример.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x(y+1)\,dx-\left(x^2+1\right)y\,dy=0.$$

Разделим переменные $\dfrac{x}{x^2+1}dx-\dfrac{y}{y+1}dy=0\to$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\ln C\to$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-y+\ln\left|y+1\right|=\ln C\to\ \frac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Потеряли особое решение $y=-1$.

Примеры из Бермана

3905. $x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$, $\frac{dy}{y^2-y} = \frac{dx}{x}$, $y \neq 0$, $y \neq 1$, проверка показывает, что $y = 0$ и $y = 1$ — решения; $\int \frac{dy}{y^2-y} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln|C|$, $\frac{y-1}{y} = Cx$, $y = Cxy + 1$, $y = 0$ ($y = 1$ получается из общего решения при $C = 0$).

3909. $\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$, $\int 10^{-y}dy = \int 10^x dx$, $-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1$, $10^x = -10^{-y} + C$, где $C = C_1 \ln 10$; в дальнейшем мы будем обозначать все константы буквой C.

Однородные дифференциальные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если функция $f(x, y)$ может быть представлена, как функция отношения своих аргументов $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример. $\left(xy - y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$

Пример преобразования функции. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy + y^2} = \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$

Однородное дифференциальное уравнение можно преобразовать к уравнению с разделяющимися переменными.

Введем вспомогательную функцию $\frac{y}{x} = t$ или $y = tx.$

$y' = t'x + t.$

Тогда $t'x + t = \varphi(t).$ $t'x = \varphi(t) - t,$ $\frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x},$ $\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln|x| + C.$

Вычислив интеграл, и перейдя к $y = tx,$ получим $F(x, y) = \ln|x| + C.$

Предполагается, что $\varphi(t) - t \neq 0.$ Если $\varphi(t) - t \equiv 0,$ то $y' = \frac{y}{x}$

Пример.

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}. \quad y = tx, \quad t'x + t = \frac{t - t^2}{1 - 2t}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{t - t^2}{1 - 2t} - t \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{t^2}{1 - 2t}.$$

Тогда $\frac{1 - 2t}{t^2} dt = \frac{dx}{x}$.

Проинтегрировав, получим $\frac{1}{t} + 2\ln|t| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$ или $\ln\left(e^{\frac{1}{t}} t^2 \right) = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

Окончательно $t^2 e^{\frac{1}{t}} = \frac{C}{x}$ или $\frac{y^2}{x} e^{\frac{x}{y}} = C$.

Пример из Бермана

3942. $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ $[y = tx,\ y' = t'x + t]$ $t'x + t = t\ln t$, $\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dt}{t(\ln t - 1)}$, $\ln|x| + \ln|C| = \ln|\ln t - 1|$, $Cx = \ln\frac{y}{x} - 1$, $y = xe^{1+Cx}$.

Задание в аудитории

3901, 3907, 3934, 3914, 3910, 3917, 3917, 3939, 3943

Задание на дом

3904, 3909, 3915, 3918, 3941, 3945