$$\int\limits_{\breve{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int\limits_{\breve{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

Вычисление криволинейного интеграла по координатам.

Случай	Формула для вычисления
1. Кривая задана параметрически: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_1, t_2].$	$\int\limits_{t_1}^{t_2} (P(t)x'_t + Q(t)y'_t + R(t)z'_t)\ \mathrm{d}t.$
2. Плоская кривая задана параметрически: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2].$	$\int\limits_{t_1}^{t_2} (P(t)x'_t + Q(t)y'_t)\ \mathrm{d}t..$
3. Плоская кривая задана явным образом: $y = y(x),\ \ x \in [a,\ b],$	$\int\limits_{a}^{b} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x)\ \mathrm{d}x.$

Формула Грина-Остроградского.

Пусть на плоскости Oxy задана область S, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т. е. область S — правильная.

- **Теорема.** Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области S, ограниченной контуром L, то

$$\iint\limits_S \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Примеры решения задач из Бермана

3810. Уравнение отрезка $y = 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \Rightarrow dy = 2dx$, $\int_{(0,\,0)}^{(\pi,\,2\pi)} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy = \int_0^\pi(-x\cos 2x + 4x\sin x)dx = \int_0^\pi x\,d(-\frac{\sin 2x}{2} - 4\cos x) = (-x\frac{\sin 2x}{2} - 4x\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi(\frac{\sin 2x}{2} + 4\cos x)dx = 4\pi - \frac{\cos 2x}{4}|_0^\pi + 4\sin x|_0^\pi = 4\pi$.

3815. $\int_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2} = \int_0^\pi \frac{-a^3\cos^3 t - a^3\sin^3 t}{a^2}dt = -a\int_0^\pi(\cos^3 t + \sin^3 t)dt = a\int_0^\pi(1-\cos^2 t)d(\cos t) - a\int_0^\pi(1 - \sin^2 t)d(\sin t) = a\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)|_0^\pi = -\frac{4}{3}a$.

3825.1. а) $\int_L(xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = [x = a\cos t,\ y = b\sin t] = \int_0^{2\pi}((ab\cos t\sin t + a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (ab\cos t\sin t + a\cos t - b\sin t)b\cos t)dt = \int_0^{2\pi}(ab^2\cos^2 t\sin t - a^2b\sin^2 t\cos t + ab\cos 2t - \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t)dt = \left(-ab^2\frac{\cos^3 t}{3} - a^2b\frac{\sin^3 t}{3} + ab\frac{\sin 2t}{2} + \frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t\right)|_0^{2\pi} = 0$.

б) $\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1,\ I = \iint_D(y - x)dx\,dy\ [x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi] = ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(b\rho\sin\varphi - a\rho\cos\varphi)\rho\,d\rho = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi}(b\rho\sin\varphi - a\rho\cos\varphi)d\varphi = 0$.

Задачи в аудитории
3809, 3811-1), 3), 3813, 3816, 3822, 3824

Задачи на дом
3811-2), 4), 3812-2), 4), 3814, 3815, 3825(2), 3827