Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.

:

Сведение к вычислению определенного интеграла

1) Если уравнения пути интегрирования заданы в параметрической форме $x = x(t),\ y = y(t)$ (для пространственной кривой $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$), то

$$\int\limits_K f(x,y)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt, \qquad \textbf{(1)}$$

$$\int\limits_K f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt. \qquad \textbf{(2)}$$

Здесь значение параметра t_0 берется для точки A, значение параметра t_1 берется для точки B. Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $t_0 < t_1$.

2) Если уравнения пути интегрирования заданы в явном виде $y = y(x)$ для плоской кривой (для пространственной кривой $y = y(x)$, $z = z(x)$), то

$$\int_K f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$$

$$\int_K f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x, y(x), z(x))\sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\,dx.$$

Здесь значение $x = a$ берется для точки A, значение $x = b$ берется для точки B.

Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $a < b$.

Полярное представление кривой интегрирования

Если плоская кривая L задана уравнением в полярных координатах,

$$r = r(\varphi),\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$$

то $dl = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}d\varphi$

$$\int_L f(x;y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2 + {r'_\varphi}^2}d\varphi.$$

Примеры задач из Бермана

3772. Координаты точек пересечения $(0,0)$ и $(2p,2p)$, $y^2 = 2px \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2p}$, $x'_y = \frac{y}{p}$, $ds = \sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy$, $\int_L y\,ds = \int_0^{2p} y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy = \frac{1}{p}\int_0^{2p} y\sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{1}{2p}\int_0^{2p}\sqrt{p^2+y^2}\,d(y^2+p^2) = \frac{1}{3p}\sqrt{(p^2+y^2)^3}\Big|_0^{2p} = p^2\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$.

3778. В полярных координатах L: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho' = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $ds = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\rho^2\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\rho^2\cos\varphi\,d\varphi = a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{a^3}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 3\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{a^3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}a^3\sqrt{2}$.

3782. $x'_t = \cos t - t\sin t$, $y'_t = \sin t + t\cos t$, $z'_t = 1$, $ds = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt = \sqrt{t^2+2}\,dt$, $\int_L(2z - x\sqrt{x^2+y^2})\,ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2+2}\,d(t^2+2) = \frac{1}{3}\sqrt{(t^2+2)^3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((2\pi^2+1)^{3/2}-1\right)$.

3795. В полярных координатах L: $\rho = R$, $ds = \sqrt{R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}\,d\varphi = R\,d\varphi$, $\int_L z\,ds = \int_L \frac{xy}{2R} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{R^2\cos\varphi\sin\varphi}{2R} R\,d\varphi = R^2\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi = R^2$.

Задачи в аудитории
3770, 3775, 3779, 3781, 3783, 3784, 3792

Задачи на дом
772, 3774, 3780, 3785, 3789, 3793