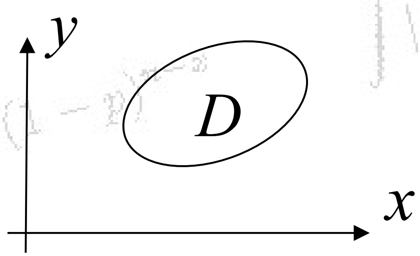
Приложения двойных интегралов.

С помощью двойного интеграла можно вычислить объем цилиндрического тела, площадь и массу плоской области. От этих задач мы и пришли к двойному интегралу.

Масса плоской пластинки.

Поверхностная плотность $\mu(x,y)$



Элемент массы равен $dM = \mu(x,y)\,d\sigma$

Масса всей пластинки равна $M = \iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma.$

Но возможны и менее очевидные приложения. С помощью двойного интеграла можно вычислять площадь поверхности, определять статические моменты, моменты инерции и центр тяжести плоской области

Приложения тройных интегралов.

Геометрическое приложение – **вычисление объема** любого пространственного тела.

По свойству 3 тройного интеграла $\iiint\limits_V dv = V$, где V – объем области V.

С помощью двойного интеграла тоже можно вычислять объем, но только цилиндрического тела, а не произвольного.

Пример. Вычислить объем пространственного тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и шаром (единичного радиуса с центром в точке (0, 0, 1))

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{1+\sqrt{1-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^1 \rho\left(1 + \sqrt{1-\rho^2} - \rho^2\right) d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{6}\pi.$$

Механические приложения

Пусть дано тело V переменной плотности $\gamma(x, y, z)$.

Массу тела M можно вычислить по формуле

$$M = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dv.$$

1) **Статические моменты инерции тела** относительно координатных плоскостей $Oxy,\ Oxz,\ Oyz$:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\, dv, \qquad M_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\, dv,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\, dv.$$

Задачи в аудитории

3559, 3564, 3565, 3573, 3588, 3609, 3691

Задачи на дом

3562, 3563, 3567, 3577, 3580 3611, 3612, 3690

Примеры решения задач из Бермана

3560. $V = \iint_D \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dy = \int_0^a \left(\frac{x^2 b}{2p} + \frac{b^3}{6q}\right) dx = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$.

3565. При $z = 0$ область D: $0 \leqslant x \leqslant 6$, $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}$; $x + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x \Rightarrow V = \iint_D (6-x)\,dx\,dy = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x)\,dy = \int_0^6 (6-x)\sqrt{x}\,dx = (4x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2})|_0^6 = \frac{48}{5}\sqrt{6}$.

3610. $V = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy = \int_0^1 \frac{7}{3} x^3\,dx = \frac{7}{12}$.

3615. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$; сфера $\rho^2 + z^2 = 4$, параболоид $\rho^2 = 3z$, линия пересечения $z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow z = 1$ $(z \geqslant 0)$, $\rho^2 = 3$, ее проекция на xOy: $\rho = \sqrt{3}$; $V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\,d\rho \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-\rho^2}\rho - \frac{\rho^3}{3}\right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{3}\sqrt{(4-\rho^2)^3} - \frac{1}{12}\rho^4\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{19}{6}\pi$; $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$, $V_2 = V_{\text{шара}} - V_1 = \frac{15}{2}\pi$.