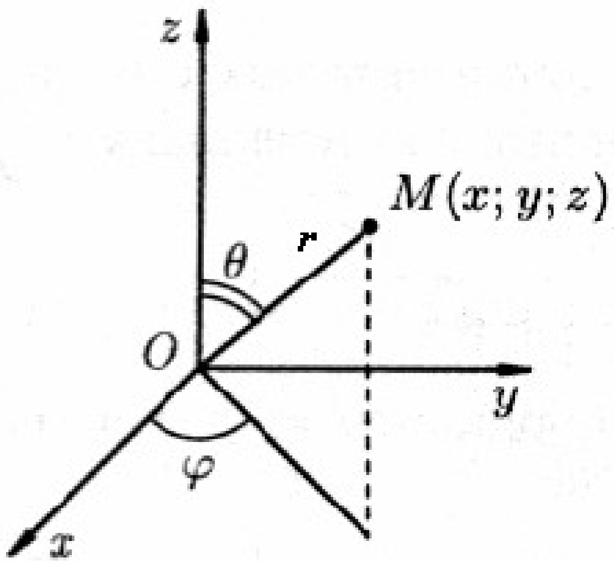
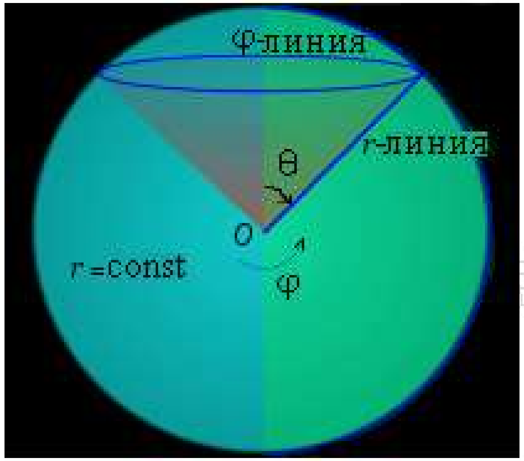
Сферические координаты.

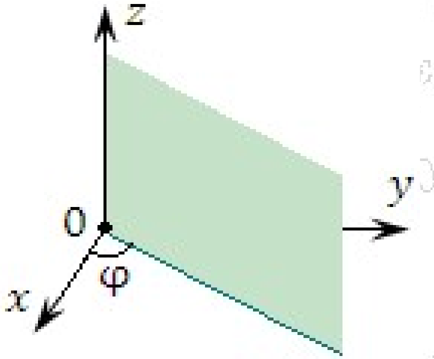
$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta,$$

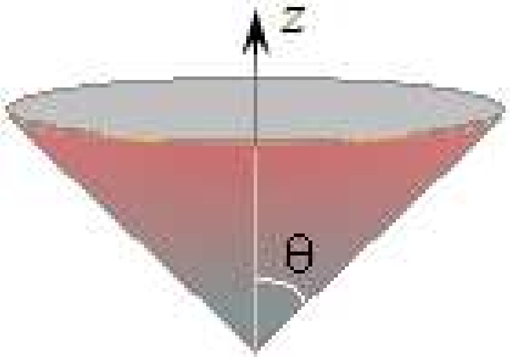
$$\left(0 \le \rho < +\infty, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; 0 \le \theta \le \pi\right).$$



Поверхность, на которой одна из координат сохраняет постоянное значение, называется **координатной поверхностью**.







Координатные поверхности сферической системы координат:

сфера (r = const);

полуплоскость (φ = const);

конус (θ = const).

В сферической системе координатные линии, проходящие через любую точку M пространства, пересекаются под прямым углом.

Якобиан преобразования $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$ вычисляется по формуле

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Тройной интеграл в сферических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

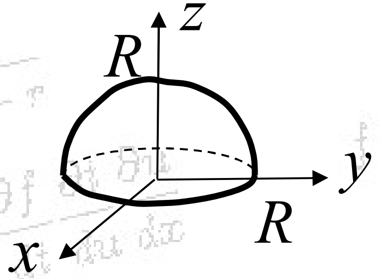
$$= \iiint\limits_{V^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,d\varphi\,dr\,d\theta.$$

Пример 1.

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dv,$

где область V - верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le R^2.$

Перейдем к сферическим координатам:



$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z=r\cos\theta,\ \ J=r^2\sin\theta.$$

Для данной области интегрирования,
переменные изменяются в пределах:

$$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Интеграл запишется в виде:

$$I=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^4dr\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=$$

$$=2\pi\frac{R^5}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta-1\right)d\left(\cos\theta\right)=2\pi\frac{R^5}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi R^5.$$

Задание в аудитории
3549, 3556

Домашнее задание
3554, 3555, 3557