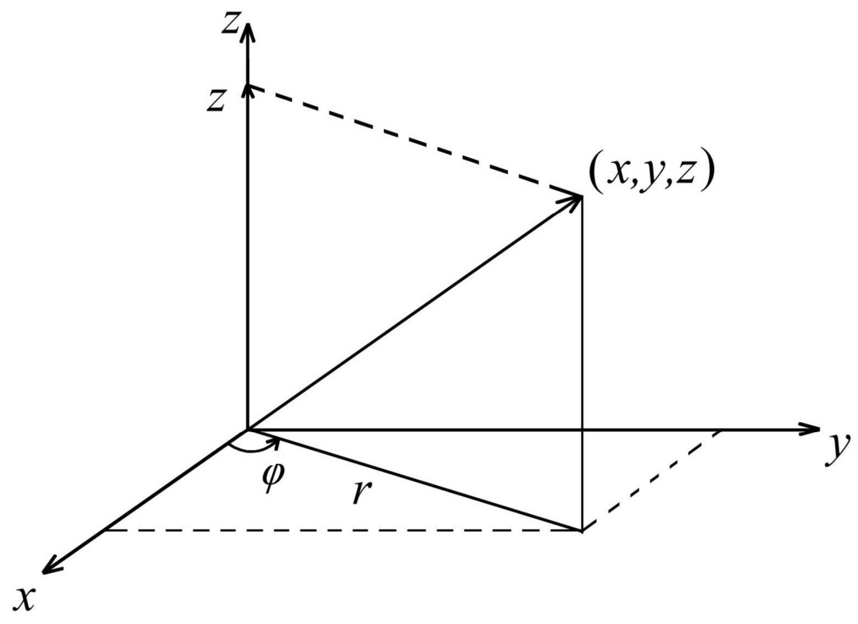
# Цилиндрические координаты.

$$x = r\cos\varphi,\;\; y = r\sin\varphi,\;\; z = z,$$
$$\left(0 \le r < +\infty,\; 0 \le \varphi < 2\pi,\; -\infty < z < +\infty\right).$$



Заметим, что при этом пара $(r, \varphi)$ представляет собой полярные координаты точки $M_1(x, y)$, являющейся ортогональной проекцией точки $M(x, y, z)$ на плоскость OXY

Ограничимся рассмотрением в пространстве $(r, \varphi, z)$ только таких областей U, координаты точек которых удовлетворяют условиям: $\{0 \le \varphi < 2\pi,\ r \ge 0\}$.

Замена переменных в тройном интеграле производится на тех же принципах, что и в двойном интеграле.

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,rd\varphi drdz.$$

***Пример*** Перейти к цилиндрическим координатам и вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz$, где $G$- объем, ограниченный цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $x+y+z=2$ и $z=0$.

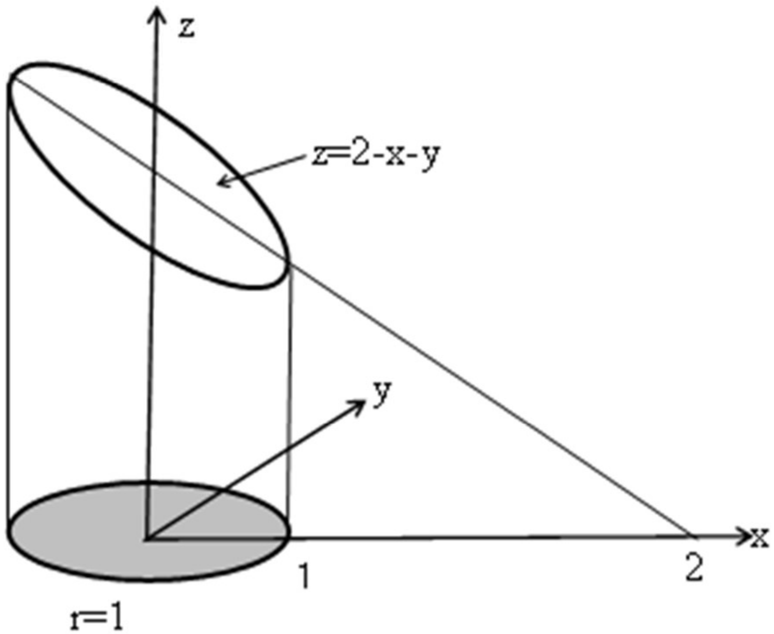



Рис.37

*Решение*: В цилиндрических координатах уравнение цилиндра имеет вид $r=1$, уравнение наклонной плоскости – $r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z=2$, а подынтегральная функция равна $r^2$. Область $G$ ограничена снизу координатной плоскостью $z=0$, а сверху – наклонной плоскостью $z=2-(\cos\varphi+\sin\varphi)$ (рис.37). Проекцией области $G$ на плоскость $Oxy$ является круг единичного радиуса, граница которого $r=1$. Поэтому область $D$ задается неравенствами $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le r\le 1$. В итоге получаем:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz = \iint\limits_D r^3\,dr\,d\varphi \int\limits_0^{2-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} r^3\,dr \int\limits_0^{2-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} (2r^3 - r^4(\cos\varphi+\sin\varphi))\,dr = \pi$$

**Пример 13.** Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V z(x^2+y^2)dxdydz$, где $V$ ограничена полусферой $z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостью $z=a$ $(a>0)$.

$\nabla$ Тело $V$ и проекция его на плоскость $Oxy$ $S:\{x^2+y^2 \le R^2\}$ – круг радиуса $R$ изображены на рис. 14.19 и 14.20. Для вычисления $I$ перейдем к цилиндрическим координатам $\rho, \varphi, z$ по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, $dxdydz=\rho d\varphi d\rho dz$. Поверхности, ограничивающие $V$, преобразуются: а) $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2} \Rightarrow z=-\sqrt{R^2-\rho^2}$; б) $x^2+y^2=R^2 \Rightarrow \rho=R$; в) $z=a$. Так как нет ограничений на координату $\varphi$, то $0\le\varphi\le 2\pi$ (или $-\pi\le\varphi\le\pi$). Область интегрирования в цилиндрических координатах есть $\Omega:\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le R,\ -\sqrt{R^2-\rho^2}\le z\le a\}$.

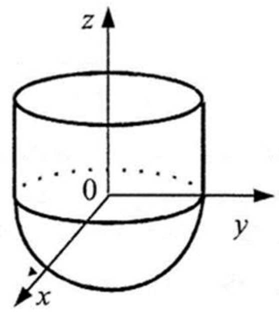


*Рис. 14.19*

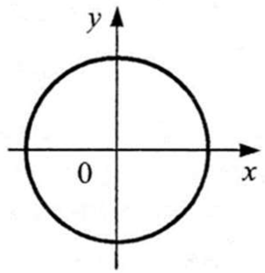


*Рис. 14.20*

Тогда по формуле (14.17)

$$I = \iiint\limits_V z(x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_\Omega z\rho^3 d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{a} zdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho \left( \frac{z^2}{2} \Bigg|_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{a} \right) =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left[(a^2-R^2)\rho^3+\rho^5\right]d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left[(a^2-R^2)\rho^4/4+\rho^6/6\right]\Big|_0^R=\pi R^4(3a^2-R^2)/12.\ \#$$

Задание в аудитории
548, 3551,3553

Задание на дом
3547, 3550, 3552, 3558