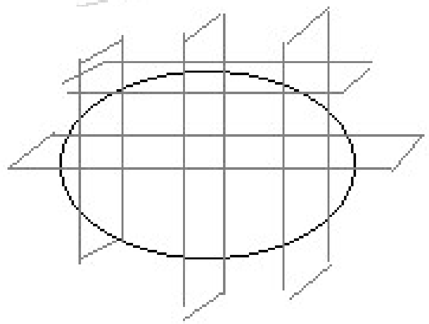
Семинар 6
Вычисление тройных интегралов.
Декартовы координаты.

- Пусть дан тройной интеграл $$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV.$$

- Разобьем область интегрирования V на элементарные объемы плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда элементарный объем равен

$$dV = dxdydz.$$



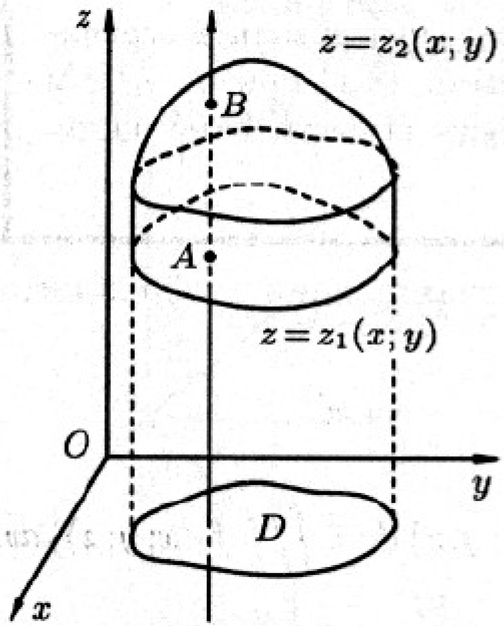
- Следовательно

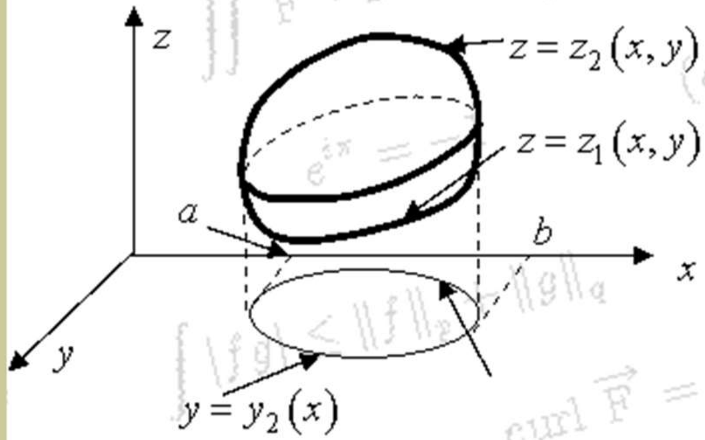
$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Правило вычисления тройного интеграла

Предположим, что любая прямая, параллельная осям Oz (Ox,Oy), пересекает границу области V не более чем в двух точках**.**

В этом случае область называется правильной в направлении Oz(Ox ,Oy)





Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1\ (x,y)$ сверху — поверхностью $z = z_2(x,y)$, причем $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ $(z_1(x,y) \leq z_2(x,y)\ )$ — непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость Oxy. Будем считать область V — правильной в направлении оси Oz:

Пусть элемент ΔV пространственного тела V проектируется на плоскость OXY в область δ_{xy} , а на ось OZ в отрезок $[z, z+\Delta z]$. Для того чтобы вычислять тройной интеграл как предел интегральных сумм, нужно в интегральной сумме перебирать эти элементы по определенному алгоритму. Если сначала перебирать элементы в столбце над областью δ_{xy}, от нижней границы до верхней (внутренний интеграл), а затем перемещать область δ_{xy} в D (внешний двойной интеграл), то получим повторный интеграл

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz \right) ds,$$

То есть, для любой непрерывной в области *V* функции *f(x, y, z)* имеет место формула перехода к повторному интегралу

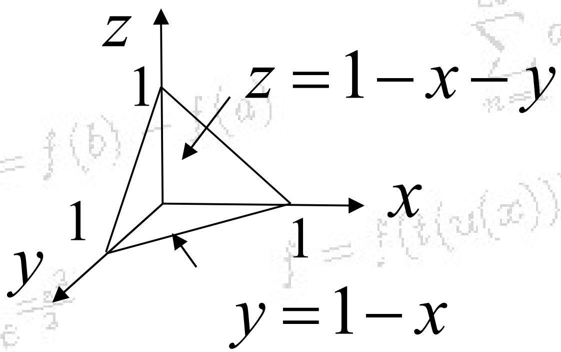
Эта формула сводит вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного. При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной *z* при постоянных *x* и *y* в пределах изменения z.

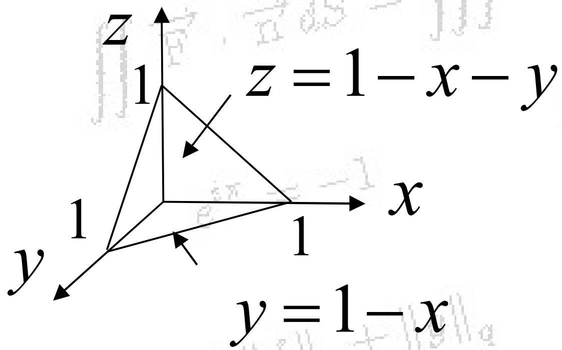
Если область D правильная в направлении Ox, то можно записать Формулу, сводящую вычисление тройного интеграла к вычислению трех однократных интегралов

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Пример.

Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$ по области, ограниченной плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$.





$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\left(-\frac{x^2}{2}y-x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}\right)dx=\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{24}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

Задачи в аудитории

3517, 3518, 3521, 3523

Задачи на дом

3519, 3520, 3522, 3524