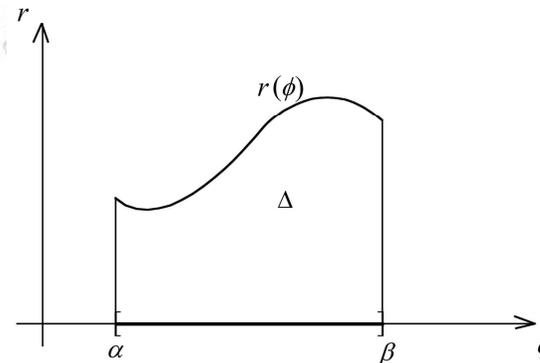
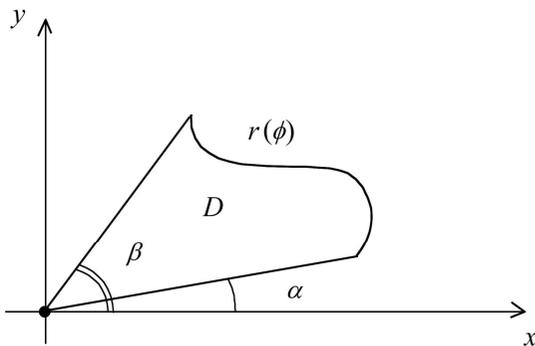


Семинар 4

Связь декартовых и полярных координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{cases}$$

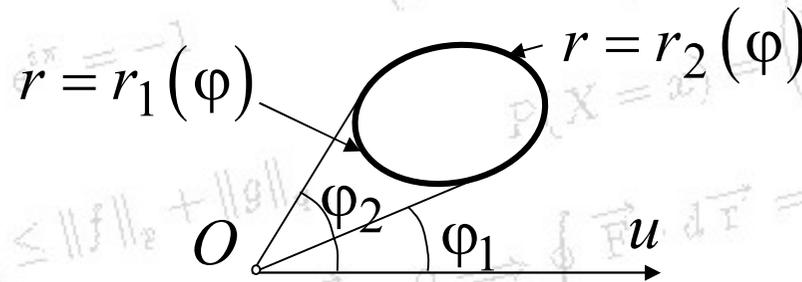


Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D в полярных координатах примет вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Примеры:

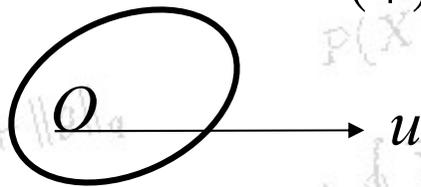
- **Пример 1.** Полюс вне области D .



$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

Пример 2. Полнос внутри области D

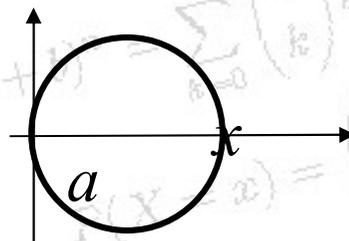
$$r = r(\varphi)$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

Пример 3

$$D: x^2 + y^2 \leq ax$$



Введем полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $J = r$

- Уравнение границы примет вид $r^2 = ar \cos \varphi$
- или $r = a \cos \varphi$
- Тогда

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

Задачи семинара

3508, 3511, 3525-2), 3526 , 3528, 3533

Домашнее задание

3510, 3525-3), 3527, 3534

3509. $\frac{1}{x} = x$ при $x = 1$, $D: 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x$,
$$I = \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_{1/x}^x = \int_1^2 (x^3 - x) dx =$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

3530. $x^2 + y^2 = \rho^2, x^2 - y^2 = \rho^2 \cos 2\varphi$, уравнение равно-
сильно $\rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\varphi \Leftrightarrow \rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}, \cos 2\varphi \geq 0$ при
 $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$, правая петля при
 $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$; $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$

3535. $y = Rx \Leftrightarrow \rho \sin \varphi = R \rho \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \arctg R$; $y =$
 $= \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$; D — сек-
тор с центром в начале координат, $\frac{y}{x} = \tg \varphi \Rightarrow I =$
 $= \int_0^{\arctg R} f(\tg \varphi) d\varphi \int_0^R \rho d\rho = \frac{R^2}{2} \int_0^{\arctg R} f(\tg \varphi) d\varphi.$