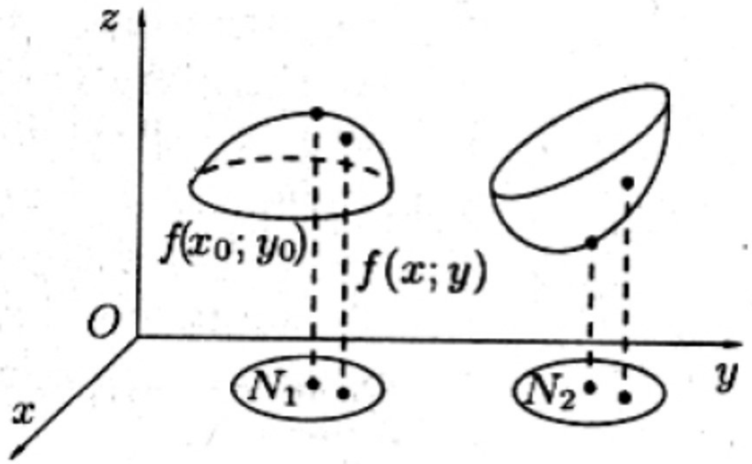
Семинар 2 (13.02.2021)

Определение 16.1. В точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет максимум, если существует ε – окрестность точки M_0 $\boldsymbol{U_\varepsilon(x_0, y_0)}$ такая, что для всех точек M из этой окрестности (причем $M \neq M_0$) имеет место неравенство $f(M) < f(M_0)$.

Определение 16.2. В в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет минимум, если существует ε – окрестность точки M_0 $\boldsymbol{U_\varepsilon(x_0, y_0)}$ такая, что для всех точек M из этой окрестности имеет место неравенство $f(M) > f(M_0)$ $(M \neq M_0)$.



Теорема 16.2.
(Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных).

Если функция $f(x,y)$, *определенная в области* D *плоскости* xOy, *имеет в точке* $(x_0,y_0)\in D$ *экстремум, то ее частные производные первого порядка в этой точке обращаются в ноль, т.е.*

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}&=0\\ \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}&=0\end{aligned}\right\}.$$

Или, что то же самое, в точке (x_0,y_0) обращается в ноль полный дифференциал первого порядка данной функции.

Попытаемся теперь получить простые и удобные в применении достаточные условия экстремума для функции $f(x,y)$, выраженные через значения частных производных второго порядка функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Для этого обозначим $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$ и обозначим $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=t$ (для определенности считаем, что $\Delta y \neq 0$).

Очевидно, что

$$\frac{1}{2!}\cdot d^2 f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\cdot\left(At^2 + 2\cdot Bt + C\right)\cdot(\Delta y)^2 .$$

Ясно, что знак этого выражения определяется знаком квадратного трехчлена $\varphi(t) = At^2 + Bt + C$.

Его дискриминант $D = B^2 - AC$.

Если $D < 0$, то график функции $\varphi(t)$ не пересекает ось Оt (корни комплексные);

если $D > 0$, то график функции $\varphi(t)$ пересекает ось Оt в двух точках (корни вещественные);

если $D = 0$, то график функции $\varphi(t)$ касается оси Оt (корни вещественные и равные).

Введем теперь в рассмотрение величину $\Delta = AC - B^2$ = -*D*.

Принимая во внимание все вышесказанное, можем сделать следующие выводы:

Если $\Delta > 0$**, то для всех** Δx **и** Δy Δf **сохраняет знак.**

При этом, если $A > 0$**, то и** $\Delta f > 0$**.**

Следовательно, в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет **минимум**.

Если же $A < 0$**, то и** $\Delta f < 0$**,** следовательно, в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет **максимум**.

Если $\Delta < 0$, **то** для различных Δx и Δy функция $\varphi(t)$ имеет различные знаки, в силу чего Δf **изменяет знак в окрестности точки** (x_0, y_0)**.**
Следовательно, в точке (x_0, y_0) функция **экстремума не имеет**

Задание семинара
3261, 3263, 3273, 3279, 3283

Домашнее задание
3262, 3264, 3274, 3280, 3284.

Решение аналогичных задач из Бермана

3265. $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+y} \quad = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x} \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y} = -y \\ 2\sqrt{1+y}\sqrt{1+x} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2(1+x) + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\tfrac{2}{3}.$$

3277. $\frac{\partial z}{\partial x} = x^2y^2(36-4x-3y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3y(24-2x-3y)$;

$\begin{cases} 4x+3y=36 \\ 2x+3y=24 \end{cases} \Leftrightarrow x=6,\ y=4,$ $(6,\ 4)$ — критическая точка;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2xy^2(36-6x-3y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2y(72-8x-6y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3(24-2x-6y)$; при $x = 6$, $y = 4$ $a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2304$, $a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2592$, $I = \begin{vmatrix} -2304 & 0 \\ 0 & -2592 \end{vmatrix} > 0$, $a_{11} < 0 \Rightarrow (6,\ 4)$ — точка максимума.

3281. $\frac{\partial z}{\partial x} = xy(6-3x) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(4-x-2y) = 0$, $(2,1)$ — критическая точка внутри области, $z(2,1) = 4$; при $x = 0$ $z = 0$; при $y = 0$ $z = 0$; при $x+y = 6$ $z(x) = -2x^2(6-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $z' = 0$ при $x = 0$, $y = 6$ и $x = 4$, $y = 2$; $z(0,6) = 0$, $z(4,2) = -64 \Rightarrow z_{\max}(2,1) = 4$, $z_{\min}(4,2) = -64$.