Министерство образования и науки Российской федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Конспект лекций по математическому анализу
для студентов первого курса факультета Бизнеса
экономической специальности

НОВОСИБИРСК

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Двойной интеграл является обобщением понятия определённого интеграла на случай функции двух переменных.

Для введения понятия двойного интеграла используем метод интегральных сумм, который был использован при введении определённого интеграла для функции одной переменных.

Пусть в замкнутой ограниченной области D плоскости XOY задана непрерывная функция двух аргументов $z = f(x, y)$.

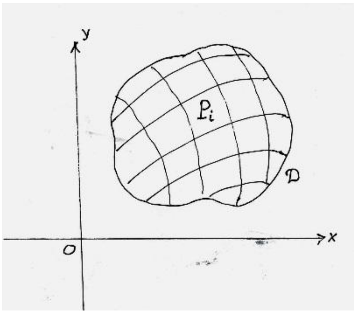

Рис.1

Разобьём область D произвольным образом на n элементарных областей D_i. Обозначим площадь элементарной области D_i через ΔS_i, а её диаметр (наибольшее расстояние между точками области) через d_i. В каждой области D_i выберем произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$, вычислим значение функции в этой точке $f(\xi_i, \eta_i)$, умножим его на площадь ΔS_i и составим сумму S_n этих произведений:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i$$

Полученная сумма называется $n -$ ой интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по области D.

Найдём предел последовательности интегральных сумм $\{S_n\}$ при $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$.

Определение 1. Если предел интегральных сумм существует, конечен и не зависит от способа построения этих сумм , т.е. от разбиения области D на части и выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i)$, то функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области D, а предел интегральных сумм $-$ двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по

области D и обозначается символом $\iint_D f(x,y)dS$..

Таким образом, по определению:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\, d_i \to 0.}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i$$

Теорема 1. (Достаточное условие интегрируемости функции)

Для того чтобы функция $z = f(x, y)$ была интегрируемой в

некоторой области D, достаточно, чтобы она была в этой области непрерывной.

2. МЕХАНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Задача о массе пластинки

Пластинкой принято называть пространственное тело, у которого один размер мал по сравнению с двумя другими.

Соответственно вводится понятие поверхностной плотности

Поверхностной плотностью называется масса единицы площади пластинки.

Поставим задачу: вычислить массу неоднородной пластинки с заданной поверхностной. плотностью.

Изобразим пластинку в виде области D на плоскости XOY и пусть поверхностная плотность пластинки задаётся функцией $\rho(x, y)$, непрерывной в области D (см. рис.1).

Если плотность распределения массы тела постоянна, то для нахождения массы необходимо плотность умножить на объём тела. В случае однородной пластинки $m = \rho S$

Так как в нашем случае пластинка неоднородная и плотность зависит от координат точки, поступим следующим образом. Разобьём пластинку на n элементарных частей D_i и в каждой части произвольным образом выберем точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Так как область D_i мала, то можно считать, что в этой области плотность массы постоянна и равна $\rho(\xi_i, \eta_i)$. Тогда масса элементарной области D_i будет равна $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$. а масса всей пластинки приближённо равна

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$$

Чтобы найти точное значение массы, перейдём к пределу при $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$. Получим

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\ d_i \to 0.}} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i = \iint_D \rho(x, y) dS$$

Таким образом, **механический смысл двойного интеграла** состоит в следующем: если подынтегральная функция $f(x, y) > 0$, то двойной интеграл численно равен массе пластинки D с плотностью распределения массы, равной подынтегральной функции.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Объём цилиндрического тела

Цилиндрическим телом называется пространственное тело, ограниченное сверху некоторой поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, снизу − замкнутой областью D на плоскости XOY, в которую проектируется поверхность, а с боков − цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси OZ, а направляющей служит граница области D.

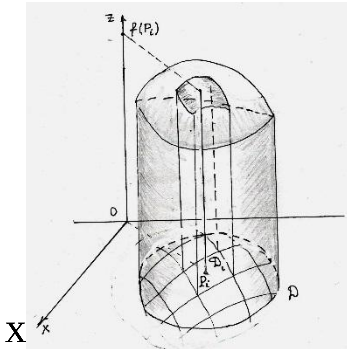

Рис.2.

Найдём объём данного цилиндрического тела. Для этого разобьём область D на n элементарных частей D_i с площадью $\cdot \Delta S_i$ и рассмотрим элементарные цилиндры, на которые разбилось цилиндрическое тело. В каждой области D_i выберем точку $P_i(\xi_{i,}\eta_i)$ и вычислим значение функции $f(\xi_{i,}\eta_i)$ в этой точке. Найдём объёмы элементарных цилиндров с площадью основания ΔS_i и высотой $f(\xi_{i,}\eta_i)$:

$$V_i = f(\xi_{i,}\eta_i) \cdot \Delta S_i$$

Просуммировав объёмы всех элементарных цилиндров, получим приближённо объём цилиндрического тела

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,}\eta_i) \cdot \Delta S_i$$

Чтобы найти точное значение объёма, перейдём к пределу при

$n \to \infty$ и $\max d_i \to 0.$ Получим

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\ d_i \to 0.}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i = \iint\limits_{D} f(x,y)dS$$

Таким образом, **геометрический смысл двойного интеграла** состоит в следующем: если подынтегральная функция $f(x,y) > 0$, то двойной интеграл численно равен объёму цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью с уравнением $z = f(x,y)$, а снизу $-$ областью интегрирования D на плоскости XOY.

4. СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Свойства дойного аналогичны свойствам определённого интеграла от функции одной переменной. Сформулируем эти свойства без доказательств.

Свойство 1. Двойной интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций (свойство аддитивности по подынтегральной функции).

$$\iint\limits_D (f(x,y)+\varphi(x,y))dS = \iint\limits_D f(x,y)dS + \iint\limits_D \varphi(x,y)dS$$

Свойство 2. Константу можно выносить за знак интеграла

$$\iint\limits_D \mathrm{c}\cdot f(x,y)dS = \mathrm{c}\cdot \iint\limits_D f(x,y)dS$$

Свойство 3. (Свойство аддитивности интеграла по области). Пусть область D разбита на две области D_1 и D_2. Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} \varphi(x,y)dS$$

Свойство 4. Если функция $f(x,y) \geq 0$ в области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dS \geq 0.$$

Свойство 5. Если в области D выполняется неравенство $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$, то

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dS \leq \iint\limits_{D_2} \varphi(x,y)dS$$

Свойство 6. Если функция $f(x,y) \equiv 1$ в области D, то

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D dS = S,$$

где $S -$ площадь области D.

Свойство 7. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $D,$ площадь которой равна $S,$ и пусть m и $M -$ наименьшее и наибольшее значения функции в этой области. Тогда имеет место неравенство

$$mS \le \iint_D f(x,y)dS \le MS$$

Величина

$$\frac{\iint_D f(x,y)dS}{S}$$

называется средним значением двойного интеграла по области D.

Свойство 8. (Теорема о среднем). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D. Тогда среднее значение интеграла по области равно значению подынтегральной функции в некоторой средней точке области

$$\frac{\iint_D f(x,y)dS}{S} = f(\xi,\eta)$$

Здесь точка $(\xi,\eta) \in D$.

V. ВЫЧИСЛЕНЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычисление двойного интеграла по правильной области

Определение 1. Область D называется правильной в направлении оси OX (OY), если прямые, параллельные этой оси пересекают область не более чем в двух точках.

Определение 2. Область D называется правильной, если она правильная в направлении обеих осей.

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в правильной области D, ограниченной линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$. Для удобства вычисления предположим, что $f(x,y) > 0$. Тогда двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dS$ равен массе пластинки D с плотностью $f(x,y)$ и при вычислении интеграла можно воспользоваться аддитивностью массы. Кроме того, заменим приращения аргументов дифференциалами и соответственно суммы $-$ интегралами.

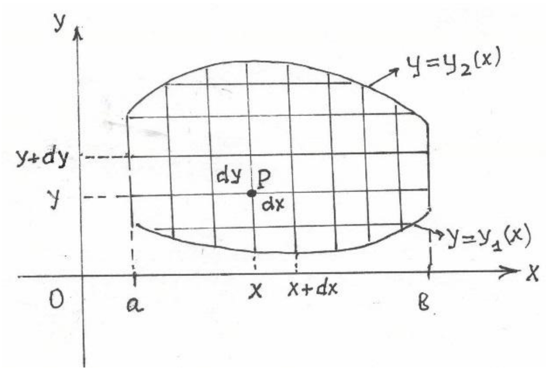

Рис.3

Разделим область D на элементарные площадки dS прямыми, параллельными координатным осям, со сторонами dx и dy. Тогда площадь элементарной площадки равна $\boldsymbol{dS = dxdy}$. Эта величина называется **элементом площади в декартовых координатах.** Тогда получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

В каждой элементарной площадке выберем точку $P(x,y)$, вычислим значение функции в этой точке и найдём массу данной площадки

$$dm(x,y) = f(x,y)dxdy$$

Найдём массу вертикальной полоски $dm(x)$, просуммировав массы площадок $dm(x,y)$ по y от точки входа $y_1(x)$ до точки выхода $y_2(x)$. Получим

$$dm(x) = \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Чтобы найти массу всей пластинки, просуммируем массы полосок $dm(x)$ по x в пределах от a до b. Получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Таким образом, вычисление **двойного интеграла** сводится к вычислению так называемого **повторного интеграла**.

Сформулируем **правило** перехода двойного интеграла к повторному.

Чтобы вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ по правильной области D, нужно проинтегрировать сначала функцию $f(x,y)$ по y от точки входа $y_1(x)$ до точки выхода $y_2(x)$, а затем полученную функцию от x проинтегрировать по x в пределах его наибольшего изменения от точки a до точки b.

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в правильной области D, ограниченной линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = c$, $y = d$.

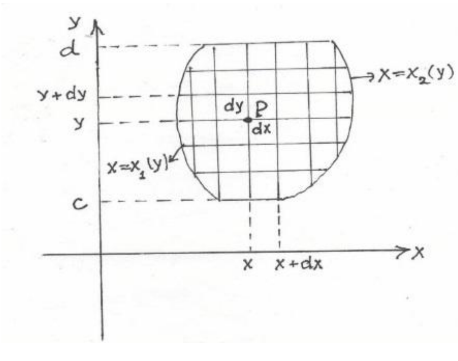

Рис.1

В этом случае можно показать, что двойной интеграл также сводится к повторному и имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Правило перехода двойного интеграла к повторному в данном случае формулируется следующим образом:

Чтобы вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ по правильной области D, нужно проинтегрировать сначала функцию $f(x,y)$ по x от точки входа $x_1(y)$ до точки выхода $x_2(y)$, а затем полученную функцию от y проинтегрировать по y в пределах его наибольшего изменения от точки c до точки d.

Замечание. Согласно свойству 6 двойного интеграла площадь пластинки D в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int\limits_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Введём на плоскости XOY наряду с декартовыми (x,y) полярные координаты (r,φ), связанные с декартовыми соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

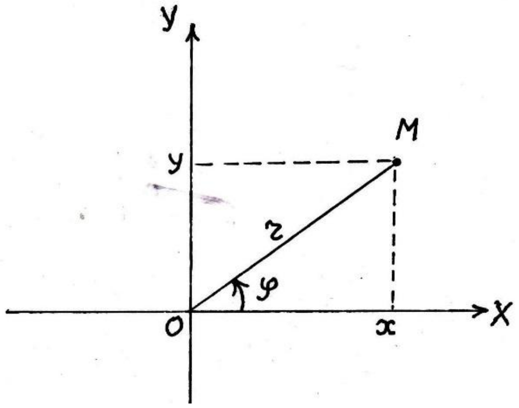

Рис.5

Координатные линии полярной системы задаются уравнениями:

$r = const \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = c^2 -$ концентрические окружности;

$\varphi = const \ -$ прямые, проходящие через начало координат.

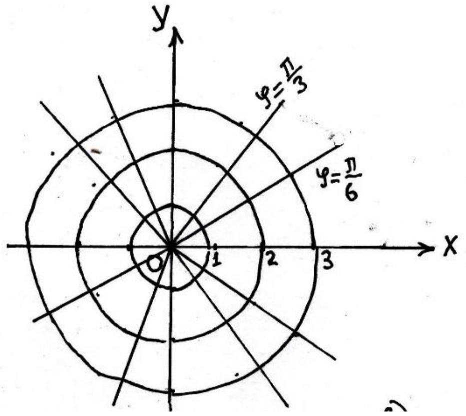

Рис. 6.

Пусть теперь в некоторой области $\boldsymbol{D}$ плоскости XOY определена и непрерывна функция $z = f(x, y)$, а область $\boldsymbol{D}$ имеет вид, изображённый на рис.7.

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dS$$

и перейдём в нём к полярным координатам. Для этого разобьём область $\boldsymbol{D}$ на элементарные части координатными линиями полярной системы (рис.7)

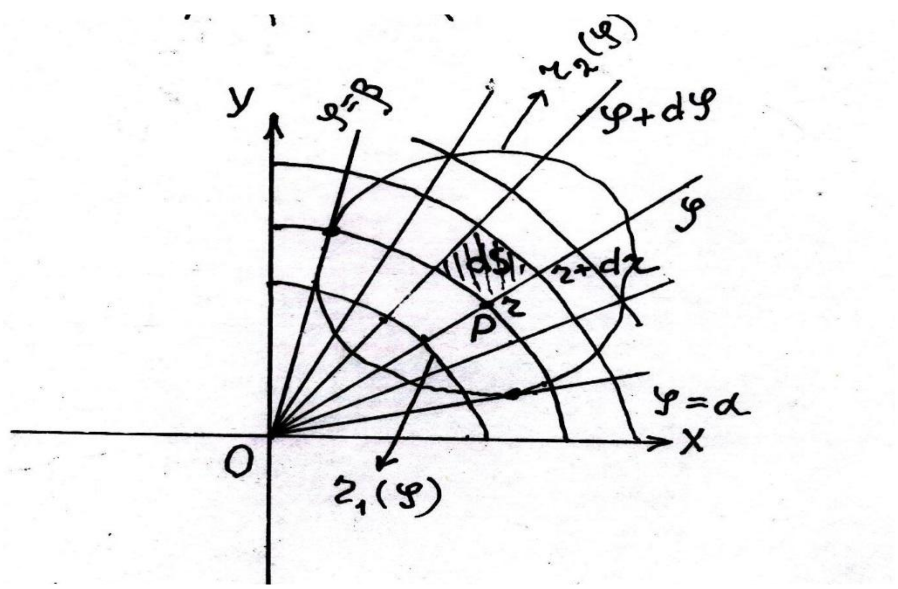

Рис.7

. В каждой элементарной части возьмём точку $P(x, y) = P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ и вычислим площадь элементарной площадки dS в полярных координатах. Получим $\boldsymbol{dS = rdrd\,\varphi}$**. Эта величина называется элементом площади в полярных координатах.** Умножим значение функции в выбранной точке на элемент площади и просуммируем полученные произведения по всем элементарным площадкам. В результате будем иметь

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

Таким образом, чтобы перейти в двойном интеграле от декартовых координат к полярным, необходимо в подынтегральной функции перейти от переменных $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ к переменным $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\varphi})$ по формулам $\boldsymbol{x = r\cos\varphi}$, $\boldsymbol{y = r\sin\varphi}$, а элемент площади $\boldsymbol{dxdy}$ в декартовых координатах заменить на элемент площади $\boldsymbol{rdrd\varphi}$ в полярных координатах.

Для вычисления интеграла в полярных координатах (так же как и в декартовых) необходимо перейти от двойного интеграла к повторному. Для этого произведения $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ проинтегрируем сначала по r от точки входа $r_1(\varphi)$ до точки выхода $r_2(\varphi)$, а затем полученную функцию от φ проинтегрируем по φ в пределах её максимального изменения от

$\varphi = \propto$ до $\varphi = \beta$. Получим

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{\propto}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} (r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление площадей плоских фигур.
   a) В декартовых координатах

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

   b) В полярных координатах

$$S = \iint\limits_D r dr d\varphi$$

2. Вычисление массы пластинки с плотностью распределения массы $\rho(x, y)$

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y) dxdy$$

3. Вычисление объёмов цилиндрических тел

$$V = \iint\limits_D f(x, y) dxdy$$

Здесь $z = f(x, y) -$ уравнение поверхности, ограничивающей тело, $D -$ область, в которую проектируется поверхность.

Пример 1. Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

$$V = \{y = x^2; \quad x = 0 \ (x \geq 0); \quad z = 0; \quad z + y = 1\}$$

Решение

Отметим, что заданное тело является цилиндрическим телом, ограниченным сверху плоскостью $z = 1 - y$, которая проектируется на плоскость $z = 0$ в область D, ограниченную линиями $y = x^2$; $x = 0$ $(x \geq 0)$.

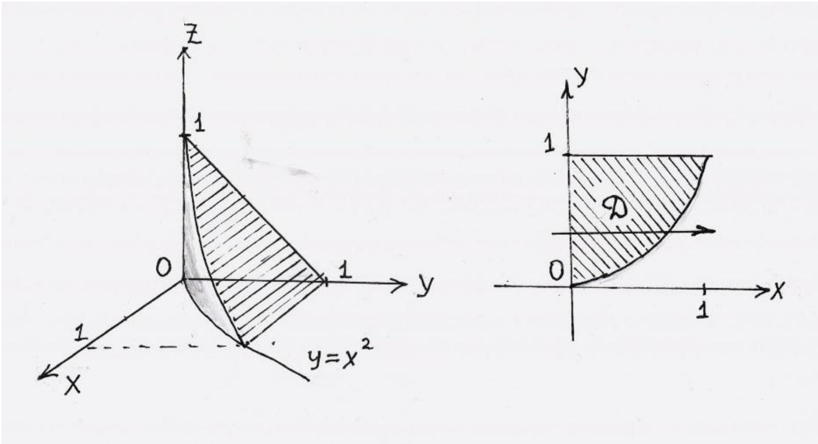

Рис.8

Поэтому объём заданного тела равен двойному интегралу

$$V = \iint\limits_D (1-y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} (1-y)dx = \int\limits_0^1 (1-y)\sqrt{y}\,dy$$

$$\int\limits_0^{(1)} \left(y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{3}}\right) dy = \frac{4}{15}$$

Пример 2. Вычислить массу пластинки D с заданной плотностью распределения массы $\rho(x, y)$:

$$D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4;\ y \geq x;\ y \geq -x\},\ \ \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Решение

Изобразим пластинку на рисунке в виде области D на плоскости XOY:

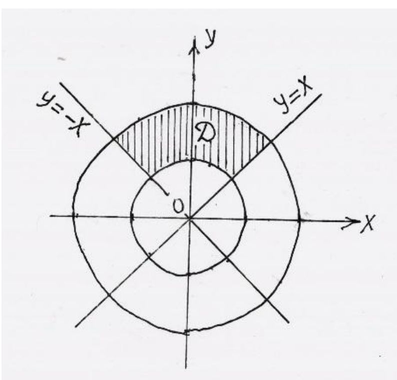

Рис.9

Очевидно, в данном случае удобно воспользоваться полярной системой координат. Перейдём к полярной системе координат по формулам: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнения границ области D и плотности распределения массы примут вид:

$$D = \left\{1 \le r \le 2;\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}\right\},\ \ \rho(r,\varphi) = r$$

Масса пластинки в этом случае вычисляется с помощью двойного интеграла

$$m = \iint\limits_D \rho(r,\varphi) r dr d\varphi = \iint\limits_D r^2 dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^2 r^2 dr = \frac{7\pi}{6}$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА