

Пристеночные функции

Наумкин В.С.

Лекция №14, 2021

Введение

Стандартные пристеночные функции

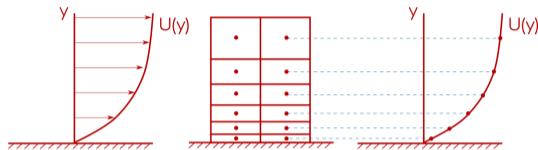
Температурные пристеночные функции

Пристеночные функции для диссипации

Пристеночные функции для k

Enhanced Wall Function

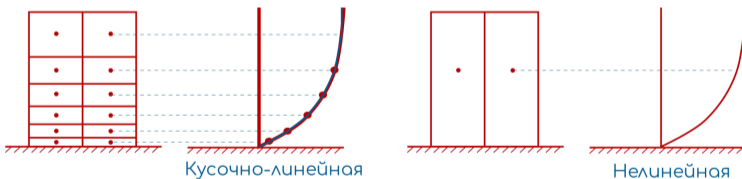
Введение



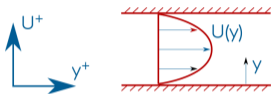
- ▶ Градиенты скорости, температуры и т.п. могут иметь большую величину на стенке.
- ▶ Для точного решения необходима очень мелкая сетка.
- ▶ Тонкие ячейки вблизи стенки могут привести к высокому аспектному отношению, плохому качеству ячеек и большому их количеству.

Мотивация

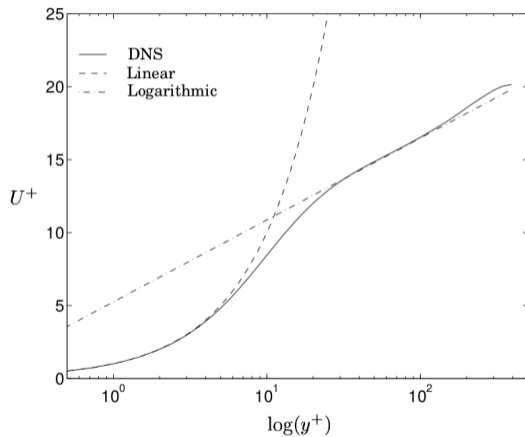
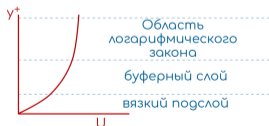
- ▶ Можно ли моделировать изменения величин от центра ячейки до стенки используя нелинейные функции (кусочно-линейные)?
- ▶ Если да, то ячейки вблизи стенки могут быть не такими тонкими.



Универсальный закон стенки



- ▶ Пристеночные функции - эмпирика, которая совпадает с наблюдаемыми профилями вблизи стенки.



Стандартные пристеночные функции

Стандартные пристеночные функции

$$U^+ = y^+ \text{ при } y^+ < 5 \quad (1)$$

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \text{ при } 30 < y^+ < 200 \quad (2)$$

- ▶ $\kappa = 0.4187$ и $E = 9.793$ - эмпирические коэффициенты.
- ▶ $y^+ = \frac{y \cdot U_\tau}{\nu}$ и $U^+ = \frac{U}{U_\tau}$
- ▶ $U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ - скорость трения (т.к. обычная скорость вблизи стенки равна нулю).

Буферный слой

- ▶ Пристеночные функции пересекаются в точке $y^+ = 11.25$

$$U^+ = y^+ \text{ при } y^+ < 11.25 \quad (3)$$

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \text{ при } y^+ < 11.25 \quad (4)$$

- ▶ Данное приближение даёт большую погрешность в буферном слое ($5 < y^+ < 30$).
- ▶ Если $y^+ < 5$, то решаются уравнения, если $y^+ > 30$ - используются пристеночные функции.

Буферный слой

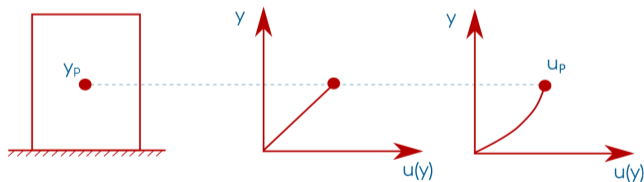
- ▶ Как альтернативу можно использовать одну функцию во всём диапазоне y^+ .
- ▶ На пример функция Сполдинга:

$$y^+ = U^+ + 0.1108 \left(e^{0.4U^+} - 1 - 0.4U^+ - 1/2 (0.4U^+)^2 - 1/6 (0.4U^+)^3 \right) \quad (5)$$

- ▶ Эта функция "размазана" и действует до $y^+ < 300$.

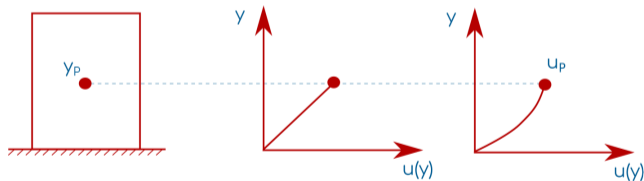
- ▶ На стенке скорость равна нулю. В центре ячейки - U_P - вычисляется из уравнения движения.
- ▶ Если скорость по ячейке изменяется линейно, то напряжения сдвига:

$$\tau_w = \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \nu \left(\frac{U_P - 0}{y_P} \right) = \nu \frac{U_P}{y_P} \quad (6)$$



- ▶ Если изменение скорости нелинейно (используются пристеночные функции):

$$\tau_w = \frac{U_t \cdot U_P}{\frac{1}{\kappa} \log(Ey^+)} \quad (7)$$



- ▶ Мы хотим использовать один стиль для вычисления градиента и получить корректный ответ по всему конечно-объёмному коду.
- ▶ Необходима такая пристеночная функция, которая даёт такой же результат, что и линейное приближение. Будем считать равными:

$$v_w \frac{U_P}{y_P} = \frac{U_t \cdot U_P}{\frac{1}{\kappa} \log(Ey^+)} \quad (8)$$

$$v_w = \frac{U_t \cdot y_P}{\frac{1}{\kappa} \log(Ey^+)} \quad (9)$$

- ▶ ⇒ CFD коды модифицируют вязкость вблизи стенки при использовании логарифмического закона. ⇒ можно использовать: $\tau_w = v_w \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$

- ▶ Если записать вязкость вблизи стенки как сумму ламинарного и турбулентного компонентов:

$$\nu_w = \nu + \nu_t \Rightarrow \quad (10)$$

$$\nu_t = \begin{cases} 0, y^+ < 11.25 \\ \nu \left(\frac{y^+}{\frac{1}{\kappa} \log(Ey^+)} - 1 \right), y^+ > 11.25 \end{cases} \quad (11)$$

- ▶ \Rightarrow выбранное предположение позволяет CFD коду переключаться между подходящими функциями для напряжения на стенке.

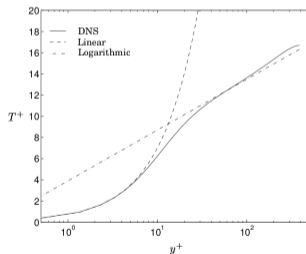
Рекомендации

- ▶ Нужно избегать использования y^+ в буферном слое ($5 < y^+ < 30$) поскольку в данной области его поведение неадекватно.
- ▶ Пристеночные функции при $y^+ > 30$ не точны в градиентных течениях с сильным градиентом, при отрыве и искривлённой поверхности.
- ▶ Лучше использовать $y^+ \sim 1$, если это возможно.
- ▶ Хорошо проверить приближение на 2D, ещё лучше сравниться с экспериментальными данными, если такие есть.

Температурные пристеночные функции

Введение

- ▶ Данные DNS дали форму профилей температуры вблизи стенки.
- ▶ Профили получились аналогичными профилю скорости.



$$T^* = Pr \cdot y^*, y^* < 5 \quad (12)$$

$$T^* = Pr_t \left(\frac{1}{\kappa} \log(E \cdot y^*) + P \right), 30 < y^* < 200 \quad (13)$$

► P - дополнительная функция.

$$y^* = \frac{\rho u u_\tau}{\mu}; T^* = \frac{(T_w - T) \rho C_p u_\tau}{q_w}; u_\tau = c_\mu^{1/4} \sqrt{k} \quad (14)$$

► Jayatilleke (1969):

$$P = 9.24 \left[\left(\frac{Pr}{Pr_t} \right)^{3/4} - 1 \right] \left[1 + 0.28 e^{-0.007 \left(\frac{Pr}{Pr_t} \right)} \right] \quad (15)$$

- ▶ Для уравнения движения: вязкость

$$\nu_w = \begin{cases} \nu, y^* < 11.25 \\ \frac{u_\tau y_P}{\frac{1}{\kappa} \log(Ey^*)}, y^* > 11.25 \end{cases} \quad (16)$$

$$\tau_w = \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho \nu_w \frac{u_P}{y_P} \quad (17)$$

- ▶ \Rightarrow - напряжения сдвига рассчитываются точно, независимо от y^* .

$$q_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho C_p \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (18)$$

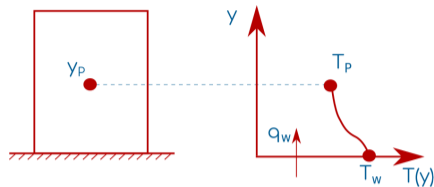
- ▶ В вязком подслое:(линейное изменение)

$$q_w = \rho C_p \alpha \left(\frac{T_w - T_P}{y_P} \right), y^* < y_L^* \quad (19)$$

- ▶ Для области с логарифмическим законом изменения

$$T_w^* = \frac{(T_w - T_P) \rho C_p u_\tau}{q_w} = Pr_t \left(\frac{1}{\kappa} \log(Ey^*) + P \right) \quad (20)$$

$$q_w = \frac{(T_w - T_P) \rho C_p u_\tau}{Pr_t \left(\frac{1}{\kappa} \log(Ey^*) + P \right)} \quad (21)$$



- Необходимо получить аналогичное уравнению (21) уравнение для области с линейным изменением:

$$\underbrace{\rho C_p \alpha \frac{T_w - T_P}{y_P}}_{\text{Линейная}} = \frac{(T_w - T_P) \rho C_p u_\tau}{\underbrace{Pr_t \left(\frac{1}{\kappa} \log(Ey^*) + P \right)}_{\text{Логарифмическая}}} \quad (22)$$

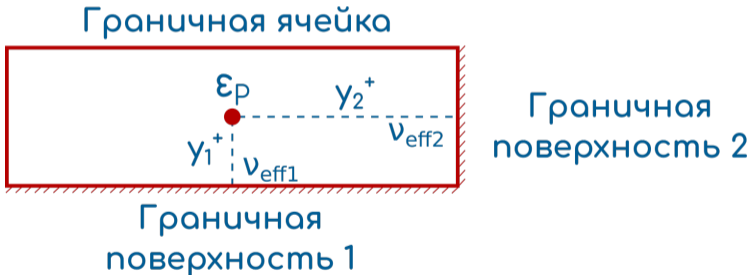
- ▶ Такое же выражение получится, если температуропроводность будет равна:

$$\alpha_w = \frac{u_\tau y_P}{Pr_t \left(\frac{1}{\kappa} \log(Ey^*) + P \right)}, y^* > y_L^* \quad (23)$$

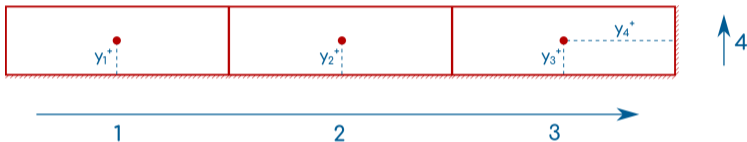
- ▶ y_L^* определяется значением Pr - точка пересечения линейной и логарифмической функций.
- ▶ Уравнения (19) и (23) определяют эффективную теплопроводность. Уравнение (19) с верным значением α_w однозначно определяет величину теплового потока на стенке.
- ▶ В сжимаемых потоках из-за вязкого нагрева у T^* появляется дополнительный член.

Пристеночные функции для диссипации

- ▶ Пользователь не может задать значения турбулентных характеристик на стенке k, ε, ω .
- ▶ Граничная ячейка может иметь больше одной граничной поверхности.
- ▶ Каждая поверхность обладает различными y^+, ν_{eff} .

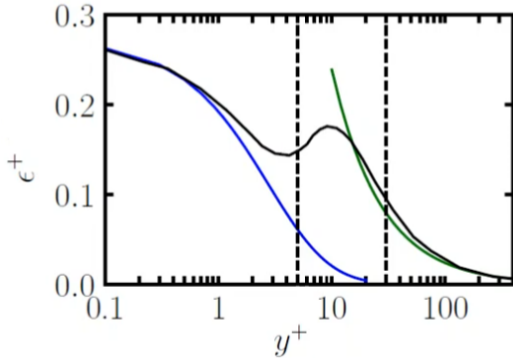


- ▶ Продвигаемся по граничной поверхности от ячейки к ячейке.
- ▶ Рассчитываем для каждой ячейки y^+ , ν_{eff} .



- ▶ ε_P вычисляется в центре ячейки.
- ▶ CFD решатель не вычисляет ε на стенке ячейки.
- ▶ Подобная обработка ε_P позволяет сбалансировать производство турбулентной кинетической энергии в ячейке G_K .

- ε_P вычисляется из пристеночных функций, основанных на данных DNS.



$$\varepsilon^+ = \frac{2k^+}{(y^+)^2}, y^+ < 5 \quad (24)$$

$$\varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa y^+}, 30 < y^+ < 200 \quad (25)$$

► В вязком подслое:

$$\varepsilon^+ = \frac{2k^+}{(y^+)^2} \quad (26)$$

$$\frac{\varepsilon_P \nu}{u_\tau^4} = 2 \left(\frac{k_P}{u_\tau^4} \right) \left(\frac{\nu}{y u_\tau} \right)^2 \quad (27)$$

$$\varepsilon_P = \frac{2k_P \nu}{y^2} \quad (28)$$

- Для области логарифмического закона:

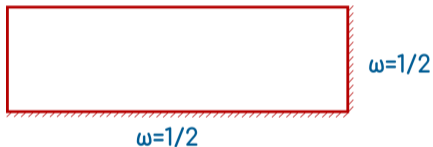
$$\varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa y_+} \quad (29)$$

$$\frac{\varepsilon_P \nu}{u_\tau^4} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\nu}{y u_\tau} \right) \quad (30)$$

$$\varepsilon_P = \frac{u_\tau^3}{\kappa y_P} \tau = C_\mu^{1/4} \sqrt{k_P} = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (31)$$

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} \sqrt{k_P}}{\kappa y_P} \quad (32)$$

- ▶ Для граничной ячейки с более чем одной граничной поверхностью:
 1. Определяем вес каждой поверхности $\omega = \frac{1}{N}$, N - количество граничных поверхностей.
 2. Продвигаясь по границе, записываем вклад каждой границы.



$$\varepsilon_P = \varepsilon_P + \omega_i \times \frac{2k_P \nu_i}{y_i^2}, y^+ < 11.25 \quad (33)$$

$$\varepsilon^+ = \varepsilon_P + \omega_i \times \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{1/2}}{\kappa y_i}, y^+ > 11.25 \quad (34)$$

- ▶ k_P - значение в центре ячейки.
- ▶ ω_i, ν_i, y_i - на каждой границе.

Пристеночные функции для k

- ▶ Уравнение для кинетической энергии турбулентности k :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \underbrace{P_k}_{\text{Производство}} + \underbrace{\rho \epsilon}_{\text{Диссипация}} \quad (35)$$

- ▶ Уравнение решается в каждой ячейке сетки.
- ▶ Рассмотрим только пристеночные ячейки.

- ▶ Производство кинетической энергии:

$$P_k = -\overline{\rho U'_i U'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (36)$$

- ▶ - произведение Рейнольдсовых напряжений и градиента средней скорости.
- ▶ За исключением стенки тензор Рейнольдсовых напряжений рассчитывается с использованием гипотезы Буссинеска.

$$-\overline{\rho U'_i U'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (37)$$

$$\mu_t = \rho k / \omega \quad (38)$$

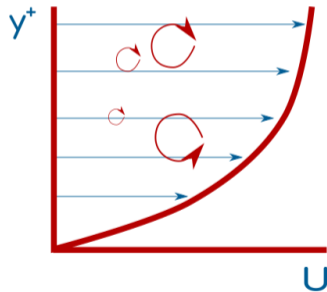
- ▶ На стенке:

$$P_k \approx \tau_{turb} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (39)$$

- ▶ y - расстояние по нормали к стенке.

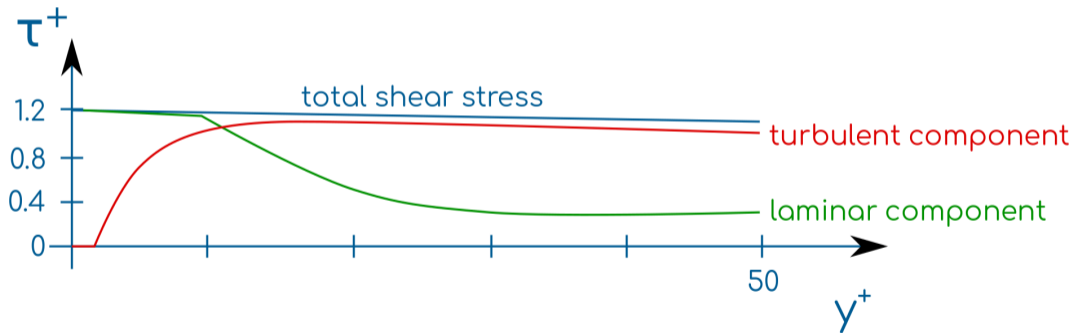
$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y} = \underbrace{\mu \frac{\partial U}{\partial y}}_{\tau_{laminar}} + \underbrace{\mu_t \frac{\partial U}{\partial y}}_{\tau_{turbulent}} \quad (40)$$

$$\tau_{turbulent} = -\rho \overline{u'v'} \quad (41)$$



- Производство кинетической энергии на стенке:

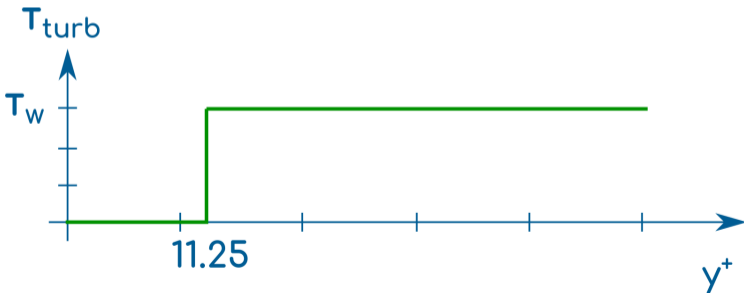
$$P_k \approx \tau_{turb} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (42)$$



► Производство кинетической энергии на стенке:

$$P_k \approx \tau_{turb} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (43)$$

$$P_k = \begin{cases} 0, & y^* < y_{lam}^* \\ \tau_w \frac{\partial U}{\partial y}, & y^* > y_{lam}^* \end{cases} \quad (44)$$



- Известен профиль скорости в области логарифмического закона:

$$U^* = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^*) \quad (45)$$

$$\frac{UC_\mu^{1/4}k^{1/2}}{\tau_w/\rho} = \frac{1}{\kappa} \log\left(E \frac{yC_\mu^{1/4}k^{1/2}}{\nu}\right) \Rightarrow \quad (46)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\rho C_\mu^{1/4}k^{1/2}\kappa y} \quad (47)$$

$$\frac{d}{dx} \log(ax) = \frac{1}{x}$$

$$P_k \approx \frac{\tau_w}{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \kappa y_P} \quad (48)$$

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P} \quad (49)$$

- ▶ OpenFOAM и Fluent используют различные формы профиля скорости $\Rightarrow P_k$ тоже отличаются:

$$\underbrace{\frac{U}{C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}}_{OpenFOAM} = \frac{1}{\kappa} \log \left(E \frac{y C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\nu} \right) \quad (50)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\kappa y_P} \quad (51)$$

$$\underbrace{\frac{UC_{\mu}^{1/4}k_P^{1/2}}{\tau_w/\rho}}_{Fluent} = \frac{1}{\kappa} \log \left(E \frac{yC_{\mu}^{1/4}k^{1/2}}{\nu} \right) \quad (52)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w/\rho}{C_{\mu}^{1/4}k^{1/2}\kappa y_P} \quad (53)$$

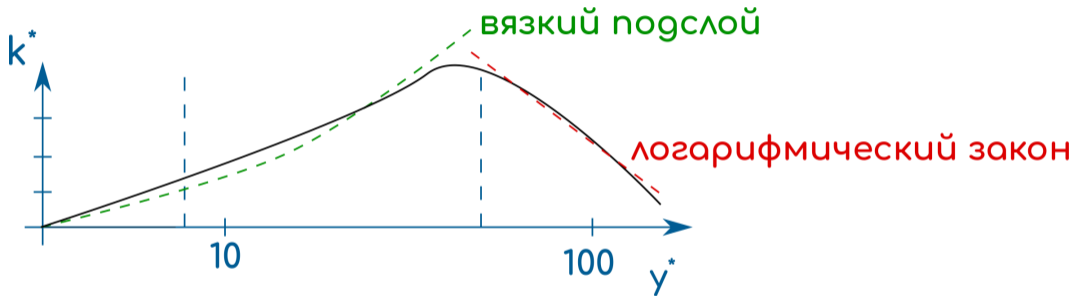
- ▶ Генерация k и её диссипация сбалансированы в пристеночных ячейках.
- ▶ Поток со стенки не нужен, т.к. он уже учтён в P_k .
- ▶ На стенке можно принять граничное условие в виде: $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$ - это методология Лаундера-Сполдинга.

- ▶ Для ячейки которая соприкасается более, чем с одной границей, учитывается вклад каждой границы:

$$P_k = P_k + w \left(\tau_w \frac{\tau_w}{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \kappa y_P} \right), y_P > 11,25 \quad (54)$$

$$P_k = P_k + w \cdot 0, y_P < 11.25 \quad (55)$$

- В вязком подслое $\frac{\partial k}{\partial n} \neq 0$, воспользуемся для учёта модифицированной P_k .



- ▶ Kalitzin и др. предложили следующие аппроксимации:

$$k^* = \frac{2400}{C_\epsilon^2} \left[\frac{1}{(y^* + C)^2} + \frac{2y^*}{C^3} - \frac{1}{C^2} \right], y^* < 11,25 \quad (56)$$

$$k^* = \frac{C_k}{\kappa \sigma_k} \log(y^*) + B_k, y^* > 11,25 \quad (57)$$

- ▶ Значение на стенке: $k_w = k^* \cdot u_\tau^2$.

- ▶ Wilcox показал, что уравнения для U и k имеют аналитическое решение в логарифмической области:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \quad (58)$$

$$k^+ = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} \quad (59)$$

- ▶ В центре ячейки устанавливается значение: $k_P = u_\tau^2 / \sqrt{C_\mu}$. Это неточное значение (старое значение Лаундера и Сполдинга).

- ▶ Сравнивая решения Wilcox и Kalitzin:

$$k^* = 1/\sqrt{C_\mu}, k^* = \frac{C_k}{\kappa \sigma_k} \log(y^*) + B_k \Rightarrow \quad (60)$$

$$C_k = 0, B_k = 1/\sqrt{C_\mu} \quad (61)$$

- ▶ Экспериментальные данные дают логарифмическое значение k^* \Rightarrow решение Wilcox-a - неточное.

Enhanced Wall Function

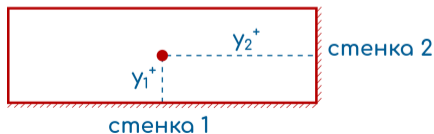
Напоминание

- ▶ Enhanced Wall Function используются только в Ansys.
- ▶ Все переменные в CFD кодах изменяются линейно вдоль любой ячейки.
- ▶ На стенке это приводит к проблеме: если ячейка слишком большая, то реальный профиль скорости нелинеен от стенки до центра ячейки.
- ▶ Напряжения на стенке = вязкость \times градиент скорости на стенке.
- ▶ Если градиент скорости на стенке некорректен, то можно модифицировать вязкость, чтобы скорректировать напряжение на стенке.

- ▶ В общем виде напряжение на стенке имеет вид:

$$\tau_w = -\rho \nu \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \underbrace{-\rho \nu_w \frac{U_P}{y_P}}_{\text{т.к. профиль скорости линейен}} \quad (62)$$

- ▶ ν_w - эффективная вязкость на стенке, её и необходимо модифицировать для коррекции напряжения на стенке.
- ▶ Вязкость модифицируется на поверхности ячейки (не в центре).
- ▶ Ячейка может иметь больше одной поверхности на стенке. Каждая поверхность имеет своё значение y^+ .



Реальный профиль скорости

$$U^+ = f(y^+) \text{ или } U^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \quad (63)$$

$$U^+ = \frac{U}{U_\tau} = \frac{UU_\tau}{U_\tau^2} = -\frac{UU_\tau \rho}{\tau_w} \Rightarrow \quad (64)$$

$$\tau_w = -\frac{UU_\tau \rho}{f(y^+)} \quad (65)$$

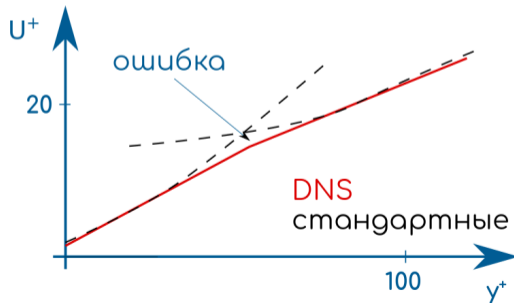
- ▶ Для получения корректного напряжения на стенке ν_w должно быть:

$$\nu_w = \frac{y_P U_\tau}{f(y^+)} \Rightarrow \nu_w = \nu \left(\frac{y^+}{f(y^+)} \right) \quad (66)$$

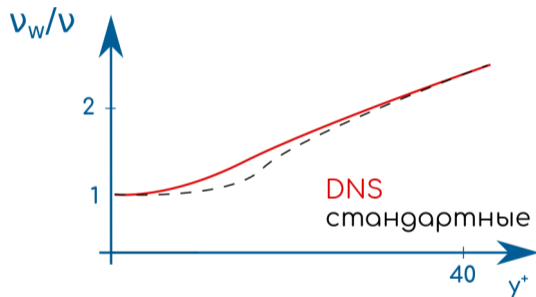
- ▶ Последняя формула справедлива для стандартных и Enhanced Wall Function.

Стандартные пристеночные функции

$$U^+ = f(y^+) = \begin{cases} y^+, & y^+ < 11.25 \\ \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+), & y^+ > 11.25 \end{cases} \quad (67)$$



Стандартные пристеночные функции



- ▶ v_w слишком мало при $y^+ > 5$ и $y^+ < 30$ - буферная область.

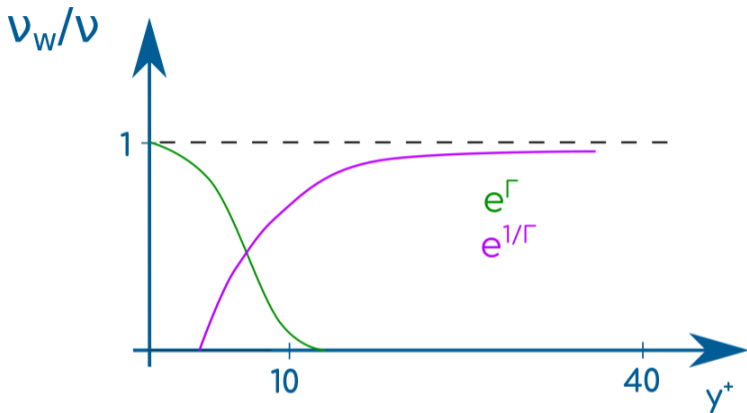
Enhanced wall function

- ▶ Выберем другую функцию для $f(y^+)$:

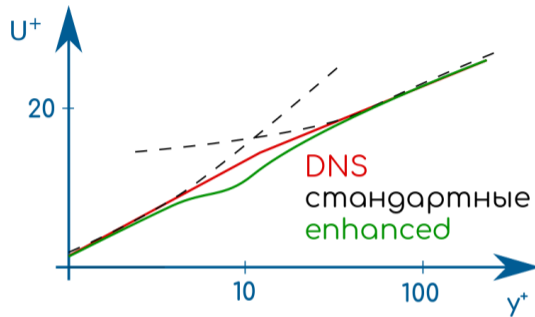
$$f(y^+) = e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{1/\Gamma} u_{turb}^+ \quad (68)$$

$$\Gamma = \frac{-0.01 (y^+)^4}{1 + 5y^+} \quad (69)$$

- ▶ "Размазывает" значение между вязким подслоем и логарифмической областью.
- ▶ e^Γ , $e^{1/\Gamma}$ - функции смешения. Они не симметричны.

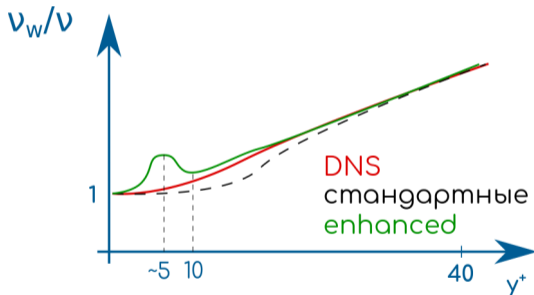


- Для U_{lam}^+ необходим более сильный вес при низких значениях y^+ , для U_{turb}^+ - меньший вес при низких значениях y^+ .



- ▶ Enhanced Wall Function не идеально соответствует данным DNS.
- ▶ Ansys использует данную формулировку поскольку она позволяет учесть сжимаемость и градиент давления.

$$v_w = \nu \left(\frac{y^+}{e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{1/\Gamma} u_{turb}^+} \right), \text{ для всех } y^+ \quad (70)$$



- ▶ Вблизи $y^+ = 5$ наблюдается экстремум, нужно поддерживать $y^+ < 2$.

$$f(y^+) = e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{1/\Gamma} u_{turb}^+ \quad (71)$$

$$u_{lam}^+ = y^+ \quad (72)$$

$$u_{turb}^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \quad (73)$$

- ▶ Это общая формулировка. Можно выбрать любые функции для u_{lam}^+ и u_{turb}^+ .
- ▶ Ansys расширяет u_{lam}^+ и u_{turb}^+ , чтобы учесть сжимаемость и градиент давления.

$$u_{lam}^+ = y^+ \left(1 + \frac{\alpha}{2} y^+ \right) \quad (74)$$

$$u_{turb}^+ = f(y^+, \alpha, \beta, \gamma) \quad (75)$$